الجامعة العربية المفتوحة
Arab Open University

برنامج
التربية

مقرر ED 360

الرياضيات
لمعلمي المرحلة الابتدائية
(٢)

المنسق العام لمقررات برامج التربية

أ. د. عبد المنعم محمد عثمان

عميد البرامج الأكاديمية في التربية– الجامعة العربية المفتوحة

فريق إعداد المادة التعليمية لهذا المقرر:

أ ٠د٠ عدنان عوض — أستاذ الرياضيات والإحصاء – الجامعة الأردنية (منسق الفريق)

أ٠د٠ مفيد عزام — أستاذ الرياضيات والإحصاء – الجامعة الأردنية (عضو الفريق)

المحكم الخارجي:

د. سعد محمد عدنان — جامعة اولد دومنيون – الولايات المتحدة الأمريكية

المراجعة والتنقيح:

د ٠ غازي صالح حمزة — عمادة الدراسات التربوية – الجامعة العربية المفتوحة

د ٠ مفيد أحمد موسى — الجامعة العربية المفتوحة – فرع الأردن

د ٠ بهجت تخاينة — الجامعة العربية المفتوحة – فرع الأردن

الإخراج والتركيب:

محمد عبدالوهاب

أشـــرف الصباغ

وحدة التصميم – إدارة المواد التعليمية – الجامعة العربية المفتوحة

السكرتارية والطباعة:

سعاد عبدالسلام الحبشي — الجامعة العربية المفتوحة

الطبعة الأولى

يطلب هذا الكتاب مباشرة من الجامعة العربية المفتوحة

ص. ب ٣٣٢٢ – الصفاة –١٣٠٣٣الكويت

www.arabou.org

المحتويات

يتكون مقرر ED360 من خمس وحدات دراسية.

تجد القائمة الكاملة للوحدات في الصفحة الأخيرة من هذا الكتاب

الوحـــدة الأولـــى

الاحصاء والاحتمال

إعـداد :

أ. د. مفيـد عـزام

الوحـــدة الأولـــى

محتويات الوحدة الدراسية

المواد المساندة للوحدة الدراسية

١ – نشاط حاسوبي : تلخيص البيانات الاحصائية بالرسومات

٢ – نشاط حاسوبي : حساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت

الأهـداف التعليمية للوحدة الدراسية

يتوقع من الطالب بعد الإنتهاء من هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

(١) يتعرف مفهوم التجربة العشوائية والحادث.

(٢) يجد الفضاء العيني لتجربة عشوائية معطاة.

(٣) يتعرف مفهوم الإحتمال المنتظم.

(٤) يبرهن قوانين الإحتمال.

(٥) يحسب إحتمالات أحداث معينة بإستخدام طريقة العد.

(٦) يلخّص بيانات إحصائية بإستخدام الجداول والأشكال الهندسية.

(٧) يتعرف مقاييس النزعة المركزية.

(٨) يحسب الوسط والمنوال والوسيط لبيانات إحصائية معطاة.

(٩) يحسب المدى والانحراف المعياري والتباين لبيانات إحصائية.

مقدمـة

إن الإحتمالات والإحصاء من المواضيع الهامة في الرياضيات وذلك لأهميتها الرياضية إضافة إلى أن لهذين الفرعين من فروع الرياضيات تطبيقات كثيرة في العديد من فروع المعرفة الإنسانية، نذكر منها العلوم الطبية والعلوم الزراعية والعلوم التربوية والعلوم الهندسية.

يتعامل موضوع الإحتمالات مع التجارب العشوائية وإحتمالات وقوع أحداث معينة، بينما يتعامل موضوع الإحصاء مع كيفية الإستدلال عن مجتمع ما من خلال عينة أو عينات من المجتمع قيد الدراسة، ونعني بالإستدلال الإحصائي تلخيص البيانات الإحصائية الناتجة عن دراسات تجريبية أو إستطلاعات للرأي أو دراسات ميدانية، ومن ثم إستخدام هذه البيانات في عمليات تقدير بعض معالم المجتمع أو إختبار فرضيات معينة حول هذه المعالم. وسنقتصر في هذه الوحدة على تناول ما يُسمى بالإحصاء الوصفي وهو ذلك الجزء من الإحصاء الذي يتعامل مع تلخيص البيانات بالطرق البيانية عن طريق جداول أو رسومات كالمدرجات التكرارية والقطوع الدائرية وبالطرق العددية، وذلك بحساب بعض مقاييس النزعة المركزية وبعض مقاييس التشتت. وللإفادة من موضوع الإحتمالات عليك عزيزي الدارس مراجعة بعض المفاهيم المتعلقة بالمجموعات والتي سبق ودرستها في الوحدة الأولى من هذا المقرر، كمفهوم المجموعة والعمليات على المجموعات كالاتحاد والتقاطع والمتممة.

لقد جاءت هذه الوحدة في ستة بنود، حيث عالجت البنود الثلاثة الأولى منها مفهوم الإحتمال مع التركيز على الإحتمال المنتظم وطرق حساب الإحتمالات بإستخدام طرق العد وقوانين الإحتمال، وهذا يحقق الاهداف الخمسة الأولى من هذه الوحدة، بينما في البنود الثلاثة الأخرى تلخيص البيانات بإستخدام الرسومات وحساب مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت، وهذا يحقق الأهداف الأربعة الأخرى.

وللإفادة من هذه الوحدة عليك عزيزي الدارس بعد دراسة كل بند أن تقوم بحل التدريبات المتعلقة بكل بند ومن ثم حل مسائل التقويم الذاتي.

التجارب العشوائية والحوادث

قد تكون لديك فكرة عن موضوع الاحتمالات وذلك لأن الاحتمالات جزء من حياتنا اليومية، فكثيراً ما نستخدم أو نسمع من الآخرين عبارات مثل:

(١) هناك فرصة كبيرة لإنخفاض معدل البطالة في العام القادم.

(٢) إن إمكانية حصول سليم على وظيفة بعد تخرجه من الجامعة كبيرة.

(٣) إحتمال سقوط الأمطار غداً حوالي ٠,٧٠.

(٤) هناك فرصة كبيرة لإرتفاع أسعار الحبوب العام القادم.

(٥) إن فرصة حدوث أعراض جانبية من إستخدام دواءٍ ما هي فرصة ضئيلة.

إن مثل هذه العبارات قد تكون مبنية على حكم شخصي أو على خبرات سابقة أو دراسات ميدانية، وقد استخدمت الكلمات "فرصة" ، "إمكانية" ، "احتمال"، ككلمات مترادفة تعطي نفس المعنى.

من الملاحظ أن العبارات السابقة وعبارات مماثلة تتناول أحداثاً قد تقع وقد لا تقع ويُراد معرفة إمكانية أو إحتمال حدوثها. وعليه فإن موضوع الإحتمالات يتعامل مع تجارب قد تعطي نواتج مختلفة ونريد معرفة إحتمال وقوع ناتج أو حادث معين. ونقصد بالتجربة أية عملية ينتج عنها مشاهدة أو قياس لخاصية ما، ويمكن تقسيم التجارب إلى نوعين هما:

النوع الأول : **التجارب المحددة**

وهو ذلك النوع من التجارب التي تعطي نفس النتيجة مع تكرار التجربة مرات عديدة تحت نفس الظروف أو الشروط، ومثال ذلك:

(١) تجربة قياس درجة غليان سائل ما تحت الظروف المعيارية.

(٢) تجربة قياس درجة إنصهار معدن معين تحت شروط معينة.

(٣) تجربة قياس سرعة الضوء في مادة معينة كالزجاج مثلاً.

(٤) تجربة قياس حجم مجسّم غير منتظم (كقطعة من صخور البازالت)، وذلك عن طريق غمرها في حجم معين من سائل كالماء ورصد الزيادة في حجم السائل.

إن مثل هذه التجارب وما شابهها تعطي نفس النتيجة بغض النظر عمّن يقوم بإجراء التجربة أو عدد مرات إجرائها، شريطة أن يتم إجراء التجربة تحت نفس الظروف .

النوع الثاني: التجارب العشوائية

وهو ذلك النوع من التجارب الذي قد يعطي نتائج مختلفة ومتعددة مع تكرار التجربة مرات عديدة حتى ولو أجريت تحت نفس الظروف، ومثال ذلك:

(١) تجربة رمي قطعة نقود مرة واحدة: يكون ناتج هذه التجربة إما "صورة" أو "كتابة".

(٢) تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة: إن النواتج الممكنة لهذه التجربة هو أحد الاعداد التالية: ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦.

(٣) تجربة زراعة خمس شجرات من الزيتون، ورصد عدد الشجرات التي تبقى حية بعد عام من زراعتها، فقد يكون العدد يساوي صفر، أو ١، أو ٢ ، أو ٣ ، أو ٤ ، أو ٥.

من الجدير بالملاحظة أنه في التجارب العشوائية نستطيع تحديد مجموعة النواتج الممكنة مسبقاً، ولكن لا نستطيع أن نعرف بالتحديد نتيجة التجربة قبل إجرائها.

تُسمى مجموعة النواتج الممكنة لتجربة عشوائية "الفضاء العيني" لتلك التجربة وسنرمز للفضاء العيني بالرمز ع.

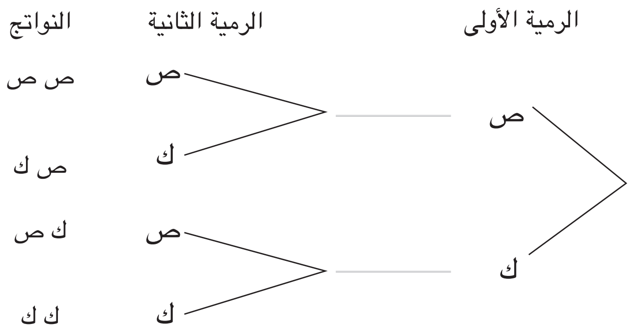
مثال (١-١):

في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين، إذا إستخدمنا الرمز ص للدلالة على أن ناتج الرمية هو الوجه الذي عليه "صورة"، والرمز ك للدلالة على أن ناتج الرمية هو الوجه الذي عليه "كتابة"

فيكون الفضاء العيني ع = {ص ص ، ص ك ، ك ص ، ك ك}.

لاحظ عزيزي الدارس أن الناتج

ص ك يدل على أن ناتج الرمية الأولى هو "صورة" وناتج الرمية الثانية هو "كتابة"بينما الناتج ك ص يدل على أن ناتج الرمية الأولى "كتابة" وناتج الرمية الثانية هو "صورة وقد يعبر عن الفضاء العيني ع باستخدام ما يُسمى "الشجرة البيانية"، وذلك كما يلي:



مثال (١-٢):

سيلعب منتخبنا الوطني لكرة القدم مباراتين إستعداداً لدورة آسيا الكروية

فإذا إستخدمنا الرمز ف : ليدل على أن نتيجة المباراة "فوز فريقنا"

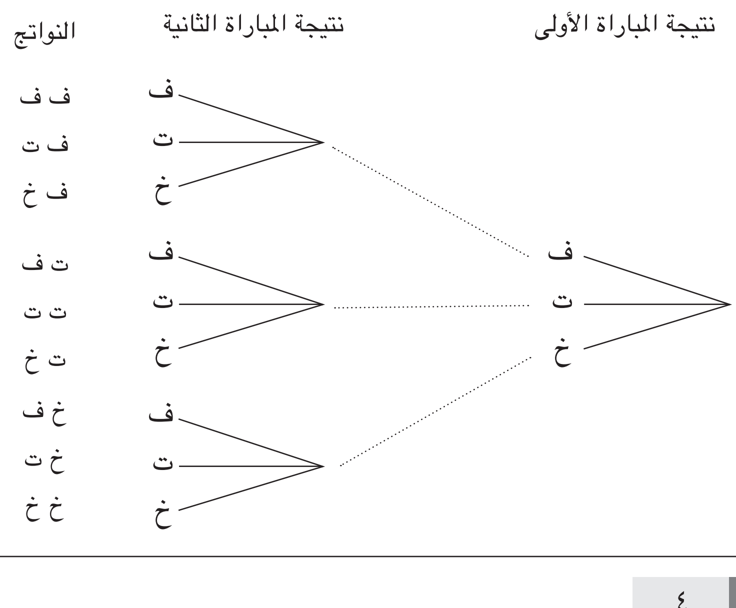
والرمز ت : ليدل على أن نتيجة المباراة "تعادل"

والرمز خ : ليدل على أن نتيجة المباراة "خسارة فريقنا"

إن الفضاء العيني ع يكون كما يلي:

ع = {ف ف، ف ت، ف خ، ت ف، ت ت، ت خ، خ ف، خ ت، خ خ}

وبإستخدام الشجرة البيانية يمكن التعبير عن الفضاء العيني كما يلي:



مثال (١-٣):

أكتب الفضاء العيني لتجربة إلقاء حجر نرد

(أ) مرة واحدة (ب) مرتين

الحل:

(أ)الفضاء العيني ع = { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

(ب) قد يكون من الأسهل التعبير عن الفضاء العيني ع من خلال الجدول التالي:

		الرمية الثانية					
		١	٢	٣	٤	٥	٦
الرمية الأولى	١	(١ ، ١)	(١ ، ٢)	(١ ، ٣)	(١ ، ٤)	(١ ، ٥)	(١ ، ٦)
	٢	(٢ ، ١)	(٢ ، ٢)	(٢ ، ٣)	(٢ ، ٤)	(٢ ، ٥)	(٢ ، ٦)
	٣	(٣ ، ١)	(٣ ، ٢)	(٣ ، ٣)	(٣ ، ٤)	(٣ ، ٥)	(٣ ، ٦)
	٤	(٤ ، ١)	(٤ ، ٢)	(٤ ، ٣)	(٤ ، ٤)	(٤ ، ٥)	(٤ ، ٦)
	٥	(٥ ، ١)	(٥ ، ٢)	(٥ ، ٣)	(٥ ، ٤)	(٥ ، ٥)	(٥ ، ٦)
	٦	(٦ ، ١)	(٦ ، ٢)	(٦ ، ٣)	(٦ ، ٤)	(٦ ، ٥)	(٦ ، ٦)

تدريب (١-١):

سيتقدم طالب لامتحانين الأول في الرياضيات والثاني في الحاسوب، إذا رصدت العلامة "ناجح" أو "راسب، أكتب الفضاء العيني.

تدريب (١-٢):

أكتب الفضاء العيني في التدريب (١-١) إذا تقدم الطالب لثلاثة امتحانات الأول في الرياضيات والثاني في الحاسوب والثالث في مبادىء الإدارة.

تدريب (١-٣):

يحتوي صندوق على أربع بطاقات تحمل الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ إذا سحبت بطاقتان

على التوالي من الصندوق وتم رصد الأرقام المسحوبة (الرقم الأول ، الرقم الثاني)، أكتب الفضاء العيني إذا كان

(أ) السحب مع الإرجاع (ب) السحب بدون إرجاع

ملاحظة:

- يقصد بالسحب مع الإرجاع أن تسحب البطاقة الأولى من الصندوق ويتم رصد الرقم المكتوب عليها ثم تعاد إلى الصندوق، ومن ثم تسحب البطاقة الثانية ويتم رصد الرقم المكتوب عليها.
- وأما عندما يكون السحب دون إرجاع فيتم سحب البطاقة الأولى ويتم رصد الرقم المكتوب عليها ولا تعاد إلى الصندوق، ومن ثم تسحب البطاقة الثانية من البطاقات الثلاث المتبقية بعد سحب البطاقة الأولى.

لقد ذكرنا في مقدمة هذا البند أن موضوع الإحتمالات يتعامل مع إمكانية وقوع حوادث معينة، ويُعرف الحادث كما يلي:

> الحادث هو أية مجموعة جزئية من الفضاء العيني، وسنرمز للحوادث بالرموز $ح_1$، $ح_2$، ...
> أي أنه إذا كان ع هو الفضاء العيني لتجربة ما، فيُسمى ح حادثاً إذا كان $ح \subset ع$.

مثال (١-٤):

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إذا كان:

$ح_1$: العدد الناتج عدد زوجي

$ح_2$: العدد الناتج عدد أقل من ٥

$ح_3$: العدد الناتج عدد فردي

فإن $ح_1$= {٢ ، ٤ ، ٦} ، $ح_2$= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} ، $ح_3$= {١ ، ٣ ، ٥}.

مثال (١-٥):

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين، إذا كان:

$ح_1$: مجموع العددين أكبر من ١٠

$ح_2$: مجموع العددين يقبل القسمة على ٥

فإن ح$_{١}$= {(٥ ، ٦) ، (٦ ، ٥) ، (٦ ، ٦)}

ح$_{٢}$= {(١ ، ٤)، (٤ ، ١)، (٢ ، ٣)، (٣ ، ٢)، (٤ ، ٦)، (٦ ، ٤)، (٥ ، ٥)}

(أنظر مثال (١–٣).

تدريب (١-٤):

في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين، أكتب عناصر الحوادث التالية:

(أ) مجموع العددين أكبر من ٧ وأقل من ١١.

(ب) العدد الأكبر من العددين الناتجين يساوي ٣.

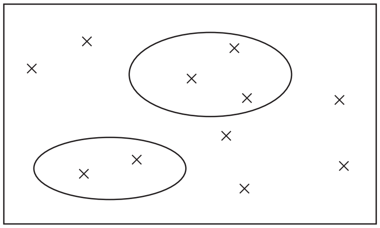
(جـ) مجموع العددين يقبل القسمة على ٤.

الآن سنعطي تعريفاً لما يُسمى بالحوادث المنفصلة:

تعريف (١-١):

إذا كان ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ حادثين، فإننا نقول أن الحادثين منفصلان إذا كان:

ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$ = ϕ



الشكل (١–١)

يمثل الشكل (١–١) حادثين منفصلين بإستخدام أشكال فن.

مثال (١-٦):

في المثال (١–٤)، لاحظ أن

ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٢}$ = {٢ ، ٤} ، ح$_{١}$ $\cap$ ح$_{٣}$ = ϕ، ح$_{٢}$ $\cap$ ح$_{٣}$ = {١ ، ٣}

وعليه فإن ح$_{١}$ و ح$_{٣}$ منفصلان، بينما الحادثان ح$_{١}$ و ح$_{٢}$ غير منفصلين، وكذلك ح$_{٢}$ و ح$_{٣}$ غير منفصلين.

تدريب (١-٥):

في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة، إذا كان

$ح_١$: العدد الناتج عدد زوجي

$ح_٢$: العدد الناتج يقبل القسمة على ٣

$ح_٣$: العدد الناتج أقل من ٢

$ح_٤$: العدد الناتج أكبر من ٥

أي من الحوادث السابقة منفصلة ؟

انتقل إلى تقويم ذاتي (١-١).

مفهوم الاحتمال المنتظم وقوانين الاحتمال

لقد تناولنا في البند السابق مفهوم التجارب العشوائية ومفهوم الحادث، وسنتناول في هذا البند كيفية حساب إحتمال حادث ما.

من الممكن تعريف الحادث عن طريق ما يُسمى بالطريقة التجريبية والتي تتلخص فيما يلي:

إذا كان لدينا تجربة عشوائية، مثل رمي قطعة نقود مرة واحدة، وكان ع هو الفضاء العيني لتلك التجربة وإذا كان ح حادثاً ما، فلإيجاد إحتمال ح بإستخدام الطريقة التجريبية تجرى التجربة قيد الدراسة مرات عديدة عددها "ن" ويتم رصد عدد المرات التي وقع فيها الحادث ح، إذا فرضنا عدد مرات وقوع الحادث يساوي ن(ح) فنعرّف إحتمال الحادث ح كما يلي:

$$ل(ح) = \lim_{ن \to \infty} \frac{ن(ح)}{ن}$$

بمعنى أنه عندما تكبر قيمة عدد مرات إجراء التجربة "ن" فإذا المقدار $\frac{ن(ح)}{ن}$ يؤول إلى عدد معين، فيُسمى هذا العدد إحتمال وقوع الحادث ح، أو ببساطة إحتمال ح والذي رمزنا له بالرمز ل(ح)، ولتوضيح الطريقة التجريبية دعنا نأخذ المثال التالي:

مثال (١-٧):

إذا أخذنا تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة وكررنا التجربة مرات عديدة، وقمنا برصد عدد مرات ظهور الصورة، يلخص الجدول التالي نتائج هذه الدراسة:

عدد مرات إجراء التجربة "ن"	عدد مرات ظهور الصورة "ن(ح)"	$\frac{ن(ح)}{ن}$
١٠	٦	٠,٦
٢٠	١١	٠,٥٥
٣٠	١٧	٠,٥٦٧
٤٠	٢٢	٠,٥٥
٦٠	٢٩	٠,٤٨٣
١٠٠	٥١	٠,٥١

لاحظ أنه بإزدياد عدد مرات إجراء التجربة "ن" فإن المقدار $\frac{ن(ح)}{ن}$ يقترب من العدد ٠,٥٠

ففي هذه الحالة نقول أن إحتمال ظهور الصورة في تجربة إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يساوي ٠.٥= $\frac{١}{٢}$

تدريب (١-٦):

إذا أخذنا تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين ورصدنا عدد الصور الظاهرة، إفرض أن الجداول التالية تمثِّل عدد الصورة الظاهرة في كل تجربة:

(أ) ن = ١٠

ح: عدد الصورة الظاهرة	ن(ح)
صفر	٣
١	٦
٢	١

(ب) ن = ١٠٠

ح: عدد الصورة الظاهرة	ن(ح)
صفر	٢٢
١	٥٣
٢	٢٥

(جـ) ن = ٢٠٠

ح: عدد الصورة الظاهرة	ن(ح)
صفر	٤٣
١	١٠٤
٢	٥٣

(د) ن = ١٠٠٠

ح: عدد الصورة الظاهرة	ن(ح)
صفر	٢٥٢
١	٤٩٨
٢	٢٥٠

ماذا تستطيع أن تقول عن ل($ح_١$) و ل($ح_٢$) و ل($ح_٣$) ؟

حيث

$ح_١$: ظهور "صفر" صورة

$ح_٢$: ظهور "صورة واحدة فقط"

$ح_٣$: ظهور "صورتين"

سنستخدم عزيزي الدارس الأفكار السالفة الذكر لتعريف ما يُسمى "الإحتمال المنتظم".

نفرض أن لدينا تجربة عشوائية فضاؤها العيني ع. إذا كان ح حادث ما،

إذا كان ن(ع) يمثل عدد عناصر الفضاء العيني ع، ن(ح) يمثل عدد عناصر الحادث ح

إذا فرضنا أن عناصر ع لها نفس إمكانية الحدوث، فإننا نعرّف إحتمال الحادث ح كما يلي:

$$\text{ل(ح)} = \frac{\text{ن(ح)}}{\text{ن(ع)}}$$

وقد يكتب الإحتمال المنتظم ل(ح) المعرّف أعلاه كما يلي:

$$\text{ل(ح)} = \frac{\text{عدد المرات التي يمكن فيها الحصول على ح}}{\text{عدد النواتج الممكنة للتجربة}}$$

مثال (١-٨):

يبين الجدول التالي عدد الطلبة المقبولين في أحد فروع الجامعة العربية المفتوحة في عام دراسي معين، ضمن تخصصات: الحاسوب، اللغة الإنجليزية، العلوم التربوية

التخصص	عدد المقبولين
الحاسوب	١٢٦
اللغة الإنجليزية	٨١
العلوم التربوية	٩٣

إذا اخترنا أحد الطلبة المقبولين عشوائياً، فما إحتمال أن يكون:

(أ) تخصص حاسوب (ب) تخصص علوم تربوية

الحل: نفرض أن:

$ح_1$: الطالب تخصص حاسوب

$ح_2$: الطالب تخصص علوم تربوية

لاحظ عزيزي الدارس أنه عند إختيار أحد الطلبة المقبولين عشوائياً، فإن إحتمال أن يكون أي من الطلبة المقبولين هو الطالب الذي تم إختياره متساوٍ لجميع الطلبة، وعليه فإن الإحتمال هو إحتمال منتظم. وبملاحظة أن

ن(ع) = عدد الطلبة الكلي = ١٢٦ + ٨١ + ٩٣ = ٣٠٠

ن($ح_1$)= عدد طلبة الحاسوب = ١٢٦

ن($ح_2$)= عدد طلبة العلوم التربوية = ٩٣

فإن

$$ل(ح_1) = \frac{ن(ح_1)}{ن(ع)} = \frac{١٢٦}{٣٠٠} = ٠{,}٤٢$$

$$ل(ح_2) = \frac{ن(ح_2)}{ن(ع)} = \frac{٩٣}{٣٠٠} = ٠{,}٣١$$

مثال (١-٩):

يبين الجدول التالي الطلبة المتقدمين لامتحان تفاضل وتكامل في أحد الجامعات في فصل دراسي معين

الجنس \ التخصص	رياضيات	حاسوب
ذكور	٢٣	٣٧
إناث	١٧	٣٣

إذا اخترنا أحد الطلبة المتقدمين لإمتحان التفاضل والتكامل عشوائياً، فما إحتمال أن يكون الطالب:

(أ) تخصص حاسوب (ب) ذكراً (جـ) أنثى تخصص حاسوب

الحل: نفرض أن

$ح_١$: الحصول على "تخصص حاسوب"

$ح_٢$: الحصول على "طالب ذكر"

$ح_٣$: الحصول على "أنثى وتخصص حاسوب"

الآن بملاحظة أن:

ن(ع) = عدد الطلبة الكلي = ٢٣ + ٣٧ + ١٧ + ٣٣ = ١١٠

ن($ح_١$)= عدد طلبة تخصص الحاسوب = ٣٧ + ٣٣ = ٧٠

ن($ح_٢$)= عدد الطلبة الذكور = ٢٣ + ٣٧ = ٦٠

ن($ح_٣$) = عدد الطالبات الإناث تخصص حاسوب = ٣٣

فإن

$$ل(ح_١) = \frac{ن(ح_١)}{ن(ع)} = \frac{٧٠}{١١٠} = ٠,٦٣$$

$$ل(ح_٢) = \frac{ن(ح_٢)}{ن(ع)} = \frac{٦٠}{١١٠} = ٠,٥٤$$

$$ل(ح_٣) = \frac{ن(ح_٣)}{ن(ع)} = \frac{٣٣}{١١٠} = ٠,٣$$

تدريب (١-٧):

يمثل الجدول التالي الطلبة المقبولين في أحد فروع الجامعة العربية المفتوحة في بعض التخصصات في عام دراسي معين مصنفين حسب التخصص والجنس

التخصص / الجنس	حاسوب	لغة إنجليزية	علوم تربوية
ذكور	٨٠	٣٦	٥٠
إناث	٥٠	٤٤	٤٠

إذا اخترنا أحد الطلبة المقبولين عشوائياً، فما إحتمال أن يكون:

(أ) تخصص لغة إنجليزية (ب) ذكراً وتخصص علوم تربوية (جـ) ذكراً

(د) تخصص علوم تربوية (هـ) ذكراً أو علوم تربوية

لقد وسبق وعرّفنا الإحتمال في الحالة التي يكون فيها نواتج التجربة متساوية إمكانية الوقوع وذلك من خلال العلاقة

$$ل(ح) = \frac{ن(ح)}{ن(ع)}$$

$$= \frac{\text{عدد المرات التي يمكن فيها الحصول على ح}}{\text{عدد النواتج الممكنة للتجربة}}$$

من هذا التعريف من الممكن أن نحصل على خصائص الإحتمال وهي:

> (أ) صفر $\leq$ ل(ح) $\leq$ ١ ، لجميع ح
>
> (ب) إذا كان $ح_١$ و $ح_٢$ حادثين منفصلين فإن:
>
> $ن(ح_١ \cup ح_٢) = ن(ح_١) + ن(ح_٢)$
>
> (جـ) ل(ع) = ١

وذلك لأن

(أ) صفر $\leq$ ن(ح) $\leq$ ن(ع) ومنها ينتج أن صفر $\leq \frac{ن(ح)}{ن(ع)} \leq$ ١

(ب) إذا كان $ح_١$ و $ح_٢$ حادثين منفصلين فإن

$ن(ح_١ \cup ح_٢) = ن(ح_١) + ن(ح_٢)$

ومنه ينتج أن

$$\frac{ن(ح_١ \cup ح_٢)}{ن(ع)} = \frac{ن(ح_١)}{ن(ع)} + \frac{ن(ح_٢)}{ن(ع)}$$

$$ل\ (ع) = \quad \frac{ن\ (ع)}{ن\ (ع)} = ١$$

قد تؤخذ الخواص (أ) ، (ب)، (جـ) السابقة لتعريف الإحتمال، وتُسمى مثل هذه الطريقة "الطريقة الرياضية لتعريف الإحتمال"، حيث يتم تعريف الإحتمال كما يلي:

إذا كان ع هو الفضاء العيني لتجربة عشوائية، فيكون ل "إحتمال على ع"، إذا تحققت الشروط التالية:

(أ) إذا كان $ح \subset ع$ فإن $ل(ح) \geq$ صفر.

(ب) إذا كان $ح_١ \cap ح_٢ = \phi$ حيث $ح_١$ ، $ح_٢ \subset ع$ فإن

$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢)$

(جـ) $ل(ع) = ١$

وسنستخدم الخصائص السابقة في برهان بعض قوانين الإحتمال والتي سنوردها في النظرية التالية:

نظرية (١-١)

(أ) $ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ١$ ، لجميع ح

حيث $\overline{ح} = ع - ح$ (وتُقرأ ليس ح)

يُسمى الحادث $\overline{ح}$ "متممة ح"

(ب) $ل(\phi) =$ صفر

(جـ) لجميع $ح_١$ و $ح_٢$ فإن:

(١) $ل\ (ح_١ - ح_٢) = ل\ (ح_١ \cap \overline{ح}_٢) = ل\ (ح_١) - ل\ (ح_١ \cap ح_٢)$

(٢) $ل\ (ح_٢ - ح_١) = ل\ (ح_٢ \cap \overline{ح}_١) = ل\ (ح_٢) - ل\ (ح_٢ \cap ح_١)$

(٣) $ل\ (ح_١ \cup ح_٢) = ل\ (ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

البرهان:

(أ) حيث أن $ح \cup \overline{ح} = ع$

فإن $ل(ح \cup \overline{ح}) = ل(ع)$

وحيث أن $ح$ و $\overline{ح}$ منفصلان فإن

$ل(ح \cup \overline{ح}) = ل(ح) + ل(\overline{ح})$ أنظر فرع (ب)

وعليه فإن $ل(ح) + ل(\overline{ح}) = ل(ع) = ١$ أنظر فرع (جـ)

(ب) حيث أن $ع \cup \phi = ع$

فإن $ل(ع \cup \phi) = ل(ع)$

أي أن $ل(ع) + ل(\phi) = ل(ع)$ ، لأن $ع$ و ϕ منفصلان

ومنها فإن $ل(\phi) =$ صفر.

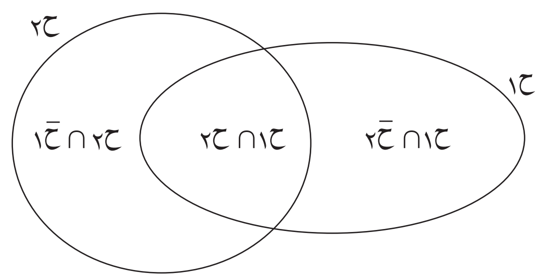
(جـ) (١) حيث أن $ح_١ = (ح_١ \cap ح_٢) \cup (ح_١ \cap \overline{ح}_٢)$

(أنظر الشكل (١-٢))

فإن $ل(ح_١) = ل(ح_١ \cap ح_٢) + ل(ح_١ \cap \overline{ح}_٢)$ (لأن $ح_١ \cap ح_٢$ و $ح_١ \cap \overline{ح}_٢$ منفصلان)

ومن هذا ينتج أن

$ل(ح_١ \cap \overline{ح}_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$



الشكل (١ – ٢)

وبملاحظة أن $ح_١ \cap \overline{ح}_٢ =$ مجموعة العناصر التي تقع في $ح_١$ وليست في $ح_٢$

$= ح_١ - ح_٢$

فإن $ل(ح_١ \cap \overline{ح}_٢) = ل(ح_١ - ح_٢) = ل(ح_١) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

وسنترك برهان جـ (٢) ، جـ (٣) للقارىء.

مثال (١-١٠):

في تجربة رمي حجر نرد مرتين فما إحتمال أن يكون أحد العددين يساوي ٦ أو مجموع العددين أكبر أو يساوي ١٠

الحل: نفرض أن

ح$_١$: أحد العددين يساوي ٦

ح$_٢$: مجموع العددين أكبر من أو يساوي ١٠

فالمطلوب هو إيجاد ل (ح$_١$ ∪ ح$_٢$)

حيث أن

ح$_١$ = {(١، ٦) ، (٢، ٦) ، (٣، ٦) ، (٤، ٦) ، (٥، ٦) ، (٦، ٦) ، (٦، ١) ، (٦، ٢) ، (٦، ٣) ، (٦، ٤) ، (٦، ٥)}

ح$_٢$= {(٥، ٦) ، (٦، ٥) ، (٦، ٦) ، (٥، ٥) ، (٤، ٦) ، (٦، ٤)}

ح$_١$ ∩ ح$_٢$= {(٥، ٦) ، (٦، ٥) ، (٦، ٦) ، (٤، ٦) ، (٦، ٤)}

فإن ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$) − ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$)

$$= \frac{ن(ح_١)}{ن(ع)} + \frac{ن(ح_٢)}{ن(ع)} - \frac{ن(ح_١ \cap ح_٢)}{ن(ع)}$$

$$= \frac{١١}{٣٦} + \frac{٦}{٣٦} - \frac{٥}{٣٦}$$

$$= \frac{١٢}{٣٦} = \frac{١}{٣}$$

تدريب (١-٨):

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة، ما إحتمال أن يكون العدد زوجياً أو أكبر من ٤.

مثال (١-١١):

إذا كان ل(ح$_١$)= ٠,٥ ، ل(ح$_٢$)= ٠,٦ ، ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$)= ٠,٩ ، أوجد ما يلي:

(أ) ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$) (ب) ل($\overline{ح}_١$ ∩ ح$_٢$)

الحل: (أ) حيث أن ل(ح$_١$ ∪ ح$_٢$) = ل(ح$_١$) + ل(ح$_٢$) − ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$)

فإن ٠,٩ = ٠,٥ + ٠,٦ − ل(ح$_١$ ∩ ح$_٢$)

ومنها فإن $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٢$

(ب) حيث $ل(\overline{ح}_١ \cap ح_٢) = ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

فإن $ل(\overline{ح}_١ \cap ح_٢) = ٠,٦ - ٠,٢ = ٠,٤$

تدريب (١-٩):

إذا كان $ل(ح_١) = ٠,٦٥$، $ل(ح_٢) = ٠,٥٥$، $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ٠,٩$، أوجد ما يلي:

(أ) $ل(\overline{ح}_١ \cap ح_٢)$ (ب) $ل(ح_١ \cap \overline{ح}_٢)$

سنعطي الآن تعريفاً لما يُعرف بالحوادث المستقلة :

تعريف (١-٢):

نقول ان الحادثين $ح_١$ و $ح_٢$ مستقلان إذا وفقط إذا كان

$$ل(ح_١ \cap ح_٢) = ل(ح_١)\ ل(ح_٢)$$

مثال (١-١٢):

إذا كان $ح_١$ و $ح_٢$ حادثين مستقلين وكان $ل(ح_١) = ٠,٥$، $ل(ح_٢) = ٠,٤$،

أوجد $ل(ح_١ \cup ح_٢)$

الحل: $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١)\ ل(ح_٢)$ (لأن $ح_١$ و $ح_٢$ مستقلان)

$= ٠,٥ + ٠,٤ - (٠,٥)\ (٠,٤) = ٠,٧$

تدريب (١-١٠):

إذا كان $ح_١$ و $ح_٢$ حادثين مستقلين وكان $ل(ح_١) = ٠,٦$، $ل(ح_٢) = ٠,٥$ ، أوجد:

(أ) $ل(ح_١ \cap ح_٢)$ (ب) $ل(ح_١ \cap \overline{ح}_٢)$

تدريب (١-١١):

إذا كان $ح_١$ و $ح_٢$ حادثين مستقلين فأثبت أن $ح_١$ و $\overline{ح}_٢$ مستقلان .

انتقل إلى تقويم ذاتي (١-٢).

حساب الاحتمالات باستخدام طرق العد

لقد عرفنا في البند السابق الإحتمال المنتظم، وذكرنا أنه إذا كان ح حادث من تجربة عشوائية فضاءها العيني ع فإن:

$$ل\,(ح) = \frac{\text{عدد المرات التي يمكن بها الحصول على ح}}{\text{عدد الطرق الكلي}}$$

فعليه يمكن حساب إحتمال حادث ما وذلك بإستخدام طرق العد التي درستها في الوحدة الثالثة. ولتوضيح هذه الطريقة لنأخذ الأمثلة التالية:

مثال (١-١٣):

يحتوي صندوق على ٤ كرات حمراء و٣ سوداء، إذا سُحبت كرتان معاً من الصندوق، فما إحتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان:

(أ) حمراوين (ب) سوداوين (جـ) مختلفتي اللون

الحل:

(أ) إذا كان $ح_١$ يمثل الحادث "الكرتان المسحوبتان حمراوان"، فإن

$ن(ح_١)$ = عدد الطرق التي يمكن بها إختيار ٢ من ٤

$$= \binom{٤}{٢} = ٦$$

$ن(ع)$ = عدد الطرق التي يمكن بها إختيار ٢ من ٧

$$= \binom{٧}{٢} = ٢١$$

وعليه فإن

$$ل(ح_١) = \frac{ن(ح_١)}{ن(ع)}$$

$$= \frac{٦}{٢١} = \frac{٢}{٧}$$

(ب) إذا كان $ح_٢$ يمثل الحادث "الكرتان سوداوان" فإن

$$ن(ح_٢) = \binom{٣}{٢} = ٣$$

وعليه فإن

$$ل(ح_٢) = \frac{ن(ح_٢)}{ن(ع)} = \frac{٣}{٢١} = \frac{١}{٧}$$

(جـ) إذا كان $ح_٣$ يمثل الحادث "الكرتان مختلفتي الألوان" فإن

ن($ح_٣$) = عدد طرق إختيار كرة سوداء وكرة حمراء

$$= \binom{٤}{١}\binom{٣}{١} = ١٢$$

وعليه فإن

$$ل(ح_٣) = \frac{ن(ح_٣)}{ن(ع)} \quad \frac{١٢}{٢١} = \frac{٤}{٧}$$

تدريب (١-١٢):

يعمل في أحد فروع الجامعة العربية المفتوحة ١٥ من أعضاء هيئة تدريس، ١٠ إداريين، و ٤ عمّال، إذا أرادت الجامعة إرسال ثلاثة من العاملين لأداء فريضة الحج على نفقة الجامعة وذلك بإختيار الثلاثة عشوائياً من العاملين فيها، ما إحتمال أن يكون الثلاثة:

(أ) من أعضاء هيئة التدريس.

(ب) أحدهم إداري والآخران من اعضاء هيئة التدريس.

(جـ) واحد من الإداريين وآخر من العمّال وآخر من أعضاء هيئة التدريس.

(د) أحدهم على الأقل من أعضاء هيئة التدريس.

مثال (١-١٤):

صندوق يحتوي على ٩ بطاقات تحمل الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩، سُحبت منه بطاقتان معاً، ما إحتمال أن يكون مجموع العددين على البطاقتين المسحوبتين:

(أ) عدد زوجي (ب) عدد فردي

الحل:

(أ) إذا كان $ح_{١}$ يمثل "مجموع العددين زوجي" ، فإن

$ح_{١}$ = {العددان زوجيان} ∪ {العددان فرديان}

وعليه فإن $ن(ح_{١})$= ن ({العددان زوجيان}) + ن({العددان فرديان})

$$= \binom{٤}{٢} + \binom{٥}{٢} = ١٢$$

وبما أن ن(ع) = عدد طرق إختيار ٢ من ٩

$$= \binom{٩}{٢} = ٣٦$$

وعليه فإن

$$ل(ح_{١}) = \frac{ن(ح_{١})}{ن(ع)} = \frac{١٦}{٣٦}$$

(ب) إذا كان $ح_{٢}$ يمثل "مجموع العددين فردي" ، فإن

$ح_{٢}$ = عدد فردي والآخر زوجي

وعليه فإن $ن(ح_{٢}) = \binom{٥}{١}\binom{٤}{١} = ٢٠$

لذا يكون

$$ل(ح_{٢}) = \frac{ن(ح_{٢})}{ن(ع)} = \frac{٢٠}{٣٦}$$

لاحظ عزيزي الدارس أن هناك إمكانيتان للمجموع، إما أن يكون زوجياً وإما أن يكون فردياً،

أي أن $ع = ح_{١} \cup ح_{٢}$

وحيث أن $ح_{١} \cap ح_{٢} = \phi$ فإن $ح_{٢} = \overline{ح}_{١}$

وعليه يمكن الحصول على ل(ح$_{٢}$) كما يلي:

$$ل(ح_{٢}) = ل(\overline{ح}_{١})$$

$$= ١ - ل(ح_{١})$$

$$= ١ - \frac{١٦}{٣٦} = \frac{٢٠}{٣٦}$$

تدريب (١-١٣):

إذا سُحبت ثلاث بطاقات معاً من الصندوق الوارد في مثال (١-١٣)، ما إحتمال أن يكون مجموع الأعداد على البطاقات المسحوبة:

(أ) زوجياً (ب) فردياً

انتقل إلى تقويم ذاتي (١-٣).

وصف البيانات الإحصائية بالرسومات

في معظم فروع المعرفة الإنسانية غالباً ما ينتج من الدراسات الميدانية أو إستطلاعات الرأي أو التجارب العلمية والإقتصادية والتربوية مجموعة من البيانات والتي قد تكون قياسات لمتغير ما كالوزن والطول أو علامة الطالب في إمتحان ما، أو قوة تحمل نوع معين من الفولاذ أو الزمن اللازم لإنهاء عمل معين، وقد تكون تصنيفاً لإفراد عينة قيد الدراسة ضمن مجموعات معينة تحددها طبيعة الدراسة كتصنيف الطلبة إلى ذكور وإناث، أو رصد رأي مجموعة من المواطنين حول مشروع قانون ما، كموافق ومعارض، ولا رأي له، أو تصنيف العاملين في مؤسسة ما حسب أعلى مؤهل علمي حصل عليه.

ومن الممكن تصنيف البيانات إلى نوعين هما:

(١) البيانات النوعية

وهي ذلك النوع من البيانات التي لا يمكن قياسها كمياً وإنما تنتج عن رصد عدد أفراد العينة الذين يمتلكون خاصية معينة، كأن يكون الشخص مالكاً لسيارة خاصة أم لا، أو

رصد عدد أفراد العينة قيد الدراسة ضمن مجموعات أو فئات مختلفة كتصنيف ضباط القوات المسلحة حسب رتبهم (ضابط صف، ملازم ثاني، ملازم أول، نقيب، رائد، مقدّم، عقيد، عميد، لواء)، أو تصنيف الخريجين حسب التقدير (إمتياز، جيد جداً، جيد، مقبول)، أو رصد الحالة الإجتماعية (متزوج، أعزب، مطلق، أرمل).

(٢) البيانات الكمية

وهي ذلك النوع من البيانات التي تنتج عن أخذ قيم رقمية أو عددية لقياسات بعض المتغيرات، كطول الطالب، عمره، دخل الأسرة، العلامة في إمتحان ما، فترة حياة نوع معين من المصابيح الكهربائية، الراتب الشهري الذي يتقاضاه معلم في وزارة التربية، وهكذا.

إن أكثر الطرق إستخداماً لوصف البيانات النوعية هي:

(أ) طريقة الأعمدة (ب) طريقة القطاعات الدائرية

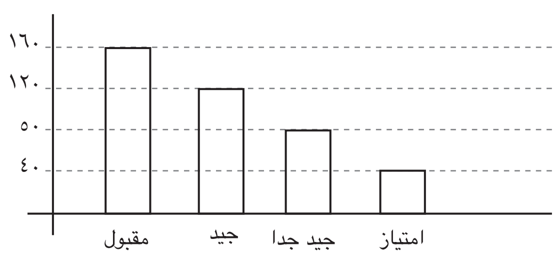
ولبيان هذه الطرق لنأخذ المثال التالي:

مثال (١-١٥):

يبين الجدول التالي عدد الخريجين في جامعة معينة في عام دراسي ما حسب تقديرهم في درجة البكالوريوس:

التقدير	عدد الطلبة
مقبول	١٦٠
جيد	١٢٠
جيد جداً	٨٠
إمتياز	٤٠
المجموع	٤٠٠

يمكن تمثيل هذه البيانات بإستخدام طريقة الأعمدة كما في الشكل (١–٣)



الشكل (١–٣)

وكما يمكن تمثيل هذه البيانات بإستخدام طريقة القطاعات الدائرية، وذلك برسم دائرة، وتمثيل كل مجموعة بقطاع دائري زاويته المركزية تساوي

$$\frac{\text{عدد الطلبة في المجموعة}}{\text{عدد الطلبة الكلي}} \times ٣٦٠^\circ$$

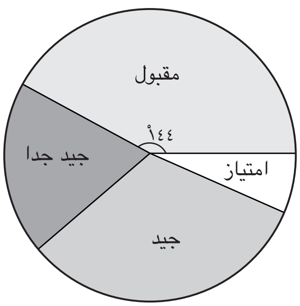
فالزاوية المركزية التي تقابل مجموعة من تخرجوا بتقدير مقبول $= \frac{١٦٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠ = ١٤٤^\circ$

والزاوية المركزية التي تقابل مجموعة من تخرجوا بتقدير جيد $= \frac{١٢٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠ = ١٠٨^\circ$

فالزاوية المركزية التي تقابل مجموعة من تخرجوا بتقدير جيد جدا $= \frac{٨٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠ = ٧٢^\circ$

فالزاوية المركزية التي تقابل مجموعة من تخرجوا بتقدير امتياز $= \frac{٤٠}{٤٠٠} \times ٣٦٠ = ٣٦^\circ$

يمثل الشكل (١-٤) البيانات بإستخدام الأقراص الدائرية:



الشكل (١-٤)

تدريب (١-١٤): مثل البيانات التالية بإستخدام:

(أ) طريقة الأعمدة (ب) طريقة القطاعات الدائرية

القسم	عدد العمليات
عيون	٨٠
عظام	١٢٠
جراحة عامة	١٧٠
نسائية	١٩٠
أنف وأذن وحنجرة	٤٠

"عدد العمليات التي أجريت في مستشفى الجامعة الأردنية في شهر تموز من عام ٢٠٠٢".

أما أكثر الطرق إستخداماً لوصف البيانات الكمية فيكون عن طريق إنشاء الجداول التكرارية والتي يمكن تمثيلها بمدرج تكراري ومنحنى تكراري كما سنوضحه فيما يلي:

الجدول التكراري هو جدول مكوّن من عمودين (أو سطرين) يُمثل العمود (أو السطر) الأول حدود الفئة ويمثل العمود الثاني (أو السطر) عدد المشاهدات في تلك الفئة والذي يُسمى تكرار الفئة. وتؤخذ الفئات بحيث توضع المشاهدات المتماثلة في نفس المجموعة.

أم المقصود "بالمشاهدات المتماثلة" فهذا الأمر يقرره الباحث أو الدارس حسب طبيعة الدراسة، فمثلاً قد يرى أحد المدرسين أن توزيع علامات مجموعة من الطلبة في إمتحان للرياضيات مثلاً، كما يلي:

ممتاز [٩٠ – ١٠٠]

جيد جداً [٨٠ – ٨٩]

جيد [٧٠ – ٧٩]

مقبول [٦٠ – ٦٩]

ضعيف [٥٠ – ٥٩]

ضعيف جداً أقل من ٥٠

وقد يرى مدرس آخر أن التوزيع التالي مناسباً:

ممتاز [٨٨ – ١٠٠]

جيد جداً [٨٠ – ٨٧]

جيد [٦٩ – ٧٩]

مقبول [٥٨ – ٦٨]

ضعيف [٤٥ – ٥٧]

ضعيف جداً أقل من ٤٥

وعليه إذا كان للباحث أو الدارس دراية وخبرة في طبيعة المشاهدات التي يتعامل معها، فهو يحدد عدد الفئات وحدود الفئات، أما إن كان لا يملك الخبرة التي تؤهله لعمل ذلك فيمكن إتباع ما يلي:

(١) يحدد عدد الفئات ويكون عادة من ٥ إلى ٢٠ فئة حسب عدد المشاهدات، فكلما زاد عدد المشاهدات زاد عدد الفئات.

(٢) تحدد حدود الفئات بقسمة المجال (وهو الفرق بين أعلى مشاهدة وأقل مشاهدة) على عدد الفئات، وتكون في هذه الحالة أطوال الفئات جميعاً متساوية وتساوي أكبر عدد صحيح في الجواب الناتج من قسمة الناتج على عدد الفئات زائد واحد إن لم يكن الناتج عدداً صحيحاً.

مثال (١-١٦):

تمثّل البيانات التالية علامات ستين طالباً في مادة طرق الإحصاء في الجامعة الأردنية في الفصل الدراسي الأول من العام الدراسي ٢٠٠٢/٢٠٠٣ (العلامة القصوى ٢٥):

٢٥ ، ١١ ، ٣ ، ١٦ ، ٢٥ ، ٧ ، ١٤ ، ١٩ ، ١٥ ، ٢٣

١٤ ، ٢٤ ، ٥ ، ١٠ ، ٢٠ ، ٢٥ ، ٧ ، ٩ ، ١٨ ، ٢٢

١٧ ، ١٩ ، ٩ ، ٤ ، ١٢ ، ٢١ ، ١٧ ، ٢٢ ، ١٤ ، ١٢

١٩ ، ١٦ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٧ ، ٢١ ، ١٥ ، ٢١ ، ١٦ ، ٢٠

١٢ ، ٢٠ ، ١٧ ، ١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١١ ، ٨ ، ٢٠ ، ٢١

١٦ ، ١٧ ، ١٢ ، ٢٠ ، ١٦ ، ٨ ، ١١ ، ٨ ، ١٧ ، ٢٥

إذا أخذنا الفئات كما يلي:

الفئة الأولى تضم العلامات من ١ إلى ٥

الفئة الثانية تضم العلامات من ٦ إلى ١٠

الفئة الثالثة تضم العلامات من ١١ إلى ١٥

الفئة الرابعة تضم العلامات من ١٦ إلى ٢٠

الفئة الخامسة تضم العلامات من ٢١ إلى ٢٥

إذا قمنا بعد العلامات في كل فئة فإننا نحصل على الجدول التكراري الآتي:

حدود الفئات	التكـــرار
١ – ٥	٣
٦ – ١٠	٨
١١ – ١٥	١٤
١٢	٢٣
٢١ – ٢٥	١١

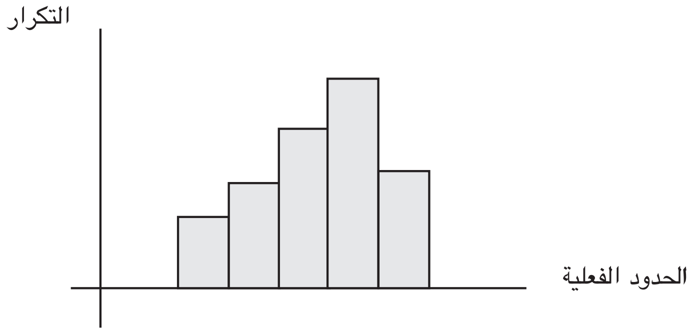
(تكرار الفئة هو عدد المشاهدات في تلك الفئة).

ولرسم المدرج التكراري نرسم مستطيلات قواعدها هي الحدود الفعلية للفئات وإرتفاعاتها تساوي تكرار الفئات، وتوجد الحدود الفعلية للفئات بإضافة وطرح ٠,٥ من حدود الفئات إذا كانت العلامات المرصودة أعداداً صحيحة.

فالحدود الفعلية للفئات في المثال (١- ١٦) هي على التوالي:

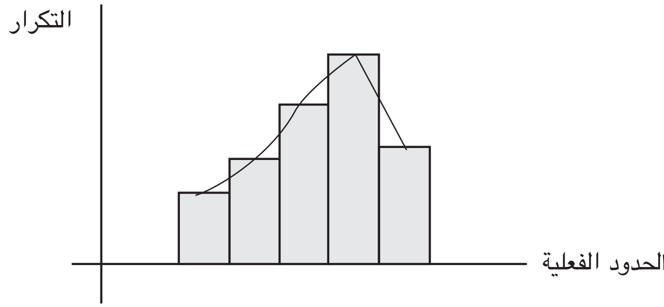
(٠,٥ – ٥,٥)، (٥,٥ – ١٠,٥)، (١٠,٥ – ١٥,٥)، (١٥,٥ – ٢٠,٥)، (٢٠,٥ – ٢٥,٥)

وعليه يكون المدرج التكراري للبيانات السابقة كما في الشكل (١–٥)



الشكل (١–٥)

ولرسم المنحنى التكراري تؤخذ النقاط التي تمثل منتصف القواعد العليا للمستطيلات، ثم توصل بمستقيمات وبعدها تقرّب هذه المستقيمات بمنحنى أملس، أنظر الشكل (١–٦).



الشكل (١-٦)

تدريب (١-١٥):

كون الجدول التكراري ومن ثم أرسم المدرج التكراري والمنحنى التكراري للبيانات التالية، مستخدماً حدود الفئات التالية:

[٥ – ١٠] ، [١١ – ١٦] ، [١٧ – ٢٥] ، [٢٦–٣٤] ، [٣٥ – ٤٠]

٨ ،	٢٧ ،	١٧ ،	١٦ ،	١١ ،	٢٤ ،	١٧ ،	٣٠ ،	٣٩ ،	٣٥
٣٩ ،	٥ ،	١٤ ،	١٩ ،	٢٠ ،	١٠ ،	٨ ،	٢٦ ،	١٥ ،	٩
٩ ،	١٤ ،	٢٠ ،	٣٥ ،	١٥ ،	١٠ ،	١٩ ،	٩ ،	٥ ،	٣٧
٢٩ ،	٣١ ،	٢٧ ،	١٩ ،	٢٣ ،	٣٠ ،	١٢ ،	٣٠ ،	٣٤ ،	٢٧

انتقل إلى تقويم ذاتي (١-٤).

مقاييس النزعة المركزية

لقد تناولنا في البند السابق بعض الطرق لوصف البيانات بالرسومات والجداول، وسنتناول في هذا البند والبند الذي يليه بعض المقاييس العددية لوصف البيانات الإحصائية، حيث سنتناول في هذا البند بعض مقاييس النزعة المركزية، وسنتناول في البند التالي بعض مقاييس التشتت.

إن مقاييس النزعة المركزية هي تلك المقاييس التي تعطي العدد أو النقطة التي تتركز أو تتجمع حولها البيانات قيد الدراسة، ومن أهم هذه المقاييس:

(١) الوسط (٢) الوسيط (٣) المنوال

أولاً : الوســط

إذا كان لدينا ن من الأعداد ، ورمزنا لهذه الأعداد بالرموز

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، ... ، س_ن$

حيث $س_١$ يمثل العدد الأول ، $س_٢$ العدد الثاني ، . . . ، وهكذا

فيعرّف الوسط (وأحياناً يُسمى الوسط الحسابي) لهذه الأعداد، والذي يُرمز له بالرمز $\overline{س}$ كما يلي:

$$\overline{س} = \frac{(س_١ + س_٢ + ، . . . . + س_ن)}{ن}$$

أي أن الوسط لبيانات معطاة يساوي خارج قسمة مجموع البيانات على عددها.

مثال (١-١٧):

احسب الوسط للبيانات التالية:

٥ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢٥ ، ٤٠

الحل: لاحظ ان البيانات $س_١ ، س_٢ ، ، . . . . ، س_ن$ في هذه الحالة هي:

٥ ، ١٣ ، ١٧ ، ٢٥ ، ٤٠

وعليه فإن عدد البيانات ن = ٥

مجموع البيانات = ٥ + ١٣ + ١٧ + ٢٥ + ٤٠ = ١٠٠

وعليه فإن

$$\text{الوسط } \overline{س} = \frac{١٠٠}{٥} = ٢٠$$

تدريب (١-١٦):

احسب وسط مجموعة الأعداد

١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ، ٢٠

لاحظ عزيزي الدارس أنه في حالات كثيرة لا تعطي البيانات $س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن$ صراحة، وإنما تُعطى من خلال جدول تكراري، في مثل هذه الحالات لا نستطيع إيجاد القيمة الحقيقية للوسط ولكننا نستطيع إيجاد قيمة تقريبية للوسط الحقيقي، وذلك بتقريب المشاهدات في كل فئة بمركز تلك الفئــة، فمثــلاً إذا كان في الفئــة [١ – ٥] سبع مشاهدات فإننا نضع القيمة (١+٥) ÷ ٢= ٣، وهي مركز الفئة. [١–٥]، لكل من المشاهدات السبع التي تقع في

هذه الفترة، فنعتبر كأن هناك سبع مشاهدات قيمة كل منها تساوي ٣. وعليه فإن مجموع هذه المشاهدات يؤخذ مساوياً للعدد ٣ × ٧ = ٢١. ونكرر العملية لكافة الفئات المعطاة، ونحصل بذلك على مجموع تقريبي للمشاهدات في كل فئة، ومن ثم نقوم بجمع هذه المجاميع لنحصل على مجموع تقريبي لجميع البيانات ومنها نحصل على قيمة تقريبية للوسط $\overline{س}$.

مما سبق نخلص إلى أنه في الحالة التي تكون فيها البيانات معطاة على شكل جدول تكراري فإن الوسط يُعرّف بالعلاقة:

$$\overline{س} = \frac{م_١ك_١ + م_٢ك_٢ + ، . . . . + م_رك_ر}{ن}$$

حيث $م_١$ يمثّل مركز الفئة الأولى، $م_٢$ يمثّل مركز الفئة الثانية، . . . ، وهكذا

$ك_١$ يمثّل تكرار الفئة الأولى، $ك_٢$ يمثّل تكرار الفئة الثانية، . . . ، وهكذا

وعدد المشاهدات الكلي $ن = ك_١ + ك_٢ + . . . + ك_ر$

والرمز ر يمثل عدد الفئات.

وسنوضح طريقة إيجاد الوسط لبيانات معطاة بجدول تكراري في المثال التالي:

مثال (١-١٨): احسب وسط البيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[١ – ٥]	١٠
[٦ – ١٠]	٢٠
[١١ – ١٥]	٢٠
[١٦ – ٢٠]	٨
[٢١ – ٢٥]	٢

الحل: نقوم بإنشاء جدول يحتوي على مراكز الفئات والتكرار، ومن ثم نضرب كل مركز فئة بتكرار تلك الفئة، ومن ثم نجمع القيم الناتجة من عملية الضرب لنحصل على مجموع البيانات، بعدها نقسم هذا المجموع على عدد المشاهدات ن لنحصل على قيمة الوسط لهذه البيانات:

مركز الفئة م	التكرار ك	م × ك
٣	١٠	٣٠
٨	٢٠	١٦٠
١٣	٢٠	٢٦٠
١٨	٨	١٤٤
٢٣	٢	٤٦
المجموع	٦٠	٦٤٠

مما سبق نلاحظ أن ن = ٦٠ ، مجموع المشاهدات = ٦٤٠

وعليه فإن

الوسط $\overline{س} = \frac{٦٤٠}{٦٠} = ١٠,٦٧$

تدريب (١-١٧):

احسب وسط البيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[٠ – ٤]	٣
[٥ – ٩]	٧
[١٠ – ١٤]	٣٠
[١٥ – ١٩]	٢٠
[٢٠ – ٣٠]	١٠

ثانياً : الوسيط

يُعرف وسيط مجموعة من البيانات بأنه تلك القيمة التي تتوسط البيانات عند ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً).

لاحظ عزيزي الدارس أنه إذا كان عدد المشاهدات فردياً فإن هناك قيمة تتوسط البيانات بعد ترتيبها تصاعدياً (أو تنازلياً)، أما إذا كان عدد المشاهدات زوجياً فيؤخذ الوسيط مساوٍ لمعدل القيمتين الوسيطتين.

مثال (١-١٩): أوجد وسيط البيانات التالية:

(أ) ٥ ، ١٠ ، ١٢ ، ٢٨ ، ٣٧ (ب) ٥ ، ١٠ ، ١٢ ، ٢٨ ، ٣٧ ، ٥٠

(جـ) ٥ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٠ ، ١٢ ، ٣٠ ، ٣١

الحل:

(أ) حيث أن البيانات المعطاة مرتبة تصاعدياً وأن عدد المشاهدات فردي، فإن القيمة التي تتوسط البيانات المعطاة هي ١٢،

وعليه فإن الوسيط = ١٢

(ب) حيث أن البيانات المعطاة مرتبة تصاعدياً وأن عدد المشاهدات زوجي، فإن القيمتين الوسيطتين هما ١٢ ، ٢٨

وعليه فإن الوسيط = (١٢ + ٢٨) ÷ ٢ = ٢٠

(جـ) الوسيط = ١٠ (لأن العدد ١٠ يتوسط المجموعة).

تدريب (١-١٨):

أوجد وسيط البيانات التالية:

(أ) ٧، ١٠، ١٥، ١٦، ١٩، ٢٣، ٣٠، ٣٢ (ب) ١٥، ٩، ١٦، ١٢، ٧

والسؤال الآن هو التالي:

كيف نجد وسيط بيانات معطاة من خلال جدول تكراري ؟

فكما هو الحال في مسألة إيجاد الوسط لبيانات معطاة من خلال جدول تكراري، فإننا لا نستطيع إيجاد القيمة الحقيقية للوسيط، ولكنها تقرّب بما يلي:

$$\text{الوسيط} \quad و = أ + \frac{ك_ر}{ك} (ب - أ)$$

حيث (أ ، ب) هي الحدود الفعلية للفئة التي تحتوي الوسيط

$ك_ر$ = ن ÷ ٢ – عدد المشاهدات التي تقل عن أ

ك = تكرار الفئة التي تحتوي على الوسيط.

مثال (١-٢٠):

أوجد وسيط البيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[١ – ٥]	٩
[٦ – ١٠]	١٥
[١١ – ١٥]	١٦
[١٦ – ٢٠]	١٧
[٢١ – ٢٥]	٣
المجموع	ن = ٦٠

حيث أن عدد المشاهدات التي تقل عن الوسيط و = ن ÷ ٢ = ٣٠

فإن الوسيط يقع في الفئة [١١ ، ١٥]

وعليه فإن الحدود الفعلية لهذه الفئة هي [أ ، ب] = [١٠,٥ ، ١٥,٥]

وتكرار هذه الفئة هو ك = ١٦

عدد المشاهدات التي تقل عن أ = عدد المشاهدات قبل الفئة [أ ، ب] = ٩ + ١٥ = ٢٤

وعليه فإن $ك_ر$ = ن ÷ ٢ – عدد المشاهدات التي تقل عن أ

= ٣٠ – ٢٤ = ٦

ومنها فإن الوسيط :

$$و = أ + \frac{ك_ر}{ك} (ب - أ)$$

$$= ١٠,٥ + \frac{٦}{١٦} (١٥,٥ - ١٠,٥)$$

$$= ١٢,٣٧٥$$

سنسمي الفئة التي تحتوي على الوسيط «الفئة الوسيطية».

مثال (١-٢١):

أوجد وسيط البيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[٠ – ١٠]	١٤
[١١ – ٢١]	٣٦
[٢٢ – ٣٠]	١٨
[٣١ – ٤٠]	١٢
المجموع	ن = ٨٠

الحل:

حيث أن ن = ٨٠ ، فإن عدد المشاهدات التي تقل عن الوسيط = ن ÷ ٢ = ٤٠

وعليه فإن الفئة الوسيطية هي [١١ ، ٢١]

ومنها تكون الحدود الفعلية للفئة الوسيطية [أ ، ب] = [١٠,٥ ، ٢١,٥]

مما سبق نجد أن

(ب – أ) = ٢١,٥ – ١٠,٥ = ١١

ك = ٣٦

$ك_ر$ = ن ÷ ٢ - مجموع عدد المشاهدات قبل الفئة الوسيطية

= ٤٠ – ١٤ = ٢٦

وعليه فإن

$$\text{الوسيط}\quad و = أ + \frac{ك_ر}{ك}\,(ب - أ)$$

$$= ١٠,٥ + \frac{٢٦}{٣٦} \times ١١$$

$$= ١٨,٤٤$$

تدريب (١-١٩):

أوجد وسيط البيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[٥ – ٩]	٦
[١٠ – ١٨]	٣
[١٩ – ٢٥]	٨
[٢٦ – ٢٩]	٢٠
[٣٠ – ٤٠]	١٣
المجموع	ن = ٥٠

ثالثاً : المنـوال

يُعرف المنوال بأنه العدد الذي يقابل أعلى تكرار في حالة وجود البيانات الأصلية، ويساوي مركز الفئة التي لها أكبر تكرار في حالة وجود البيانات عبر جدول تكراري.

مثال (١-٢٢):

أوجد المنوال للبيانات التالية:

(أ) ٥ ، ٣ ، ٧ ، ٣ ، ٩ ، ٧ ، ٧ ، ١٤ ، ٧

(ب)

حدود الفئات	التكرار
[٥ – ١٠]	٧
[١١ – ١٩]	١٨
[٢٠ – ٣٠]	٩
[٣١ – ٥٠]	٥

الحل:

(أ) المنوال = ٧

(ب) المنوال = (١١ + ١٩) ÷ ٢ = ١٥

تدريب (١-٠-٢):

أوجد المنوال للبيانات التالية:

(أ) ٢ ، ٤ ، ٤ ، ٧ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ٢١ ، ٣٢

(ب)

حدود الفئات	التكرار
[١٠ – ٢٠]	١٨
[٢١ – ٣٠]	١٢
[٣١ – ٤٠]	٢٠
[٤١ – ٥٠]	٢٨
[٥١ – ٦٠]	٧

انتقل إلى تقويم ذاتي (١–٥).

مقاييس التشتت

بينما تعطي مقاييس النزعة المركزية مؤشراً على القيمة التي تتجمع حولها المشاهدات أو البيانات الإحصائية، فإن مقاييس التشتت تعطي مؤشراً على مدى تقارب أو تباعد البيانات عن بعضها.

فإذا كانت مقاييس التشتت صغيرة كانت البيانات متقاربة في قيمها، وكلما زادت قيم مقاييس التشتت تكون البيانات متباعدة نسبياً. ومن أهم مقاييس التشتت:

أولاً : المدى

ثانيا : الانحراف المعياري والتباين

ثالثاً : الانحراف المتوسط

أولاً : المدى : يُعرّف المدى بأنه الفرق بين أعلى مشاهدة وأقل مشاهدة.

فمثلاً يكون مدى البيانات ٤ ، ١٩ ، ٢٥ ، ٣ ، ١٧ ، ١٥ ، ٤٢ ، ١٣ هو:

٤٢ – ٣ = ٣٩

من الجدير بالملاحظة أن المدى قد لا يعطي مؤشراً دقيقاً عن تقارب أو تباعد بيانات معطاة، وذلك لتأثره بوجود مشاهدة أو مشاهدتين تبعد كثيراً عن المشاهدات الأخرى.

فمثلاً يكون مدى البيانات ٣ ، ٨٥ ، ٨٧ ، ٩١ ، ٨٩ ، ٩٢ ، ٨٢

يساوي ٩٢ − ٣ = ٨٩

وهو رقم كبير قد يوحي بأن المشاهدات متباعدة، وهذا غير صحيح للبيانات المذكورة أعلاه.

ثانياً : الانحراف المعياري

يُعتبر الانحراف المعياري من أهم المقاييس المستخدمة لقياس التشتت في بيانات معطاة، وعلى النقيض من المدى، فإنه لا يتأثر كثيراً بوجود مشاهدة أو اثنتين بعيدتين عن بقية المشاهدات. ويُعرّف الانحراف المعياري والذي سنرمز له بالرمز ع كما يلي:

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع } (س_ر - \overline{س})^٢}{ن}}$$

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع } (س_ر - \overline{س})^٢}{ن - ١}}$$ إذا كانت البيانات الأصلية $س_1$ ، . . . . ، $س_ن$ معطاة

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع } ((م_ر - \overline{س})^٢ ك_ر)}{ن - ١}}$$ إذا كانت البيانات معطاة بجدول تكراري

حيث $م_ر$ يمثل مركز الفئة، لاحظ أن

$$\text{مجموع } (س_ر - \overline{س})^٢ = (س_١ - \overline{س})^٢ + (س_٢ - \overline{س})^٢ + \cdots + (س_ن - \overline{س})^٢$$

$$\text{مجموع } (م_ر - \overline{س})^٢ ك = (م_١ - \overline{س})^٢ ك_١ + (م_٢ - \overline{س})^٢ ك_٢ + \cdots + (م_ن - \overline{س})^٢ ك_ر$$

هناك صيغ مكافئة للصيغ السابقة وغالباً ما تُستخدم هذه الصيغ لحساب الانحراف المعياري، وهذه الصيغ هي:

مثال (١-٢٣):

احسب الانحراف المعياري للبيانات التالية:

٥ ، ٨ ، ١٢ ، ١٥ ، ٢٠

الحل: لاحظ ان $\overline{س} = \frac{٥ + ٨ + ١٢ + ١٥ + ٢٠}{٥} = ١٢$

$$ع = \sqrt{\frac{(٥ - ١٢)^٢ + (٨ - ١٢)^٢ + (١٢ - ١٢)^٢ + (١٥ - ١٢)^٢ + (٢٠ - ١٢)^٢}{٥ - ١}} = ٥,٨٧$$

تدريب (١-٢١):

أوجد الانحراف المعياري للمشاهدات:

٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٣

مثال (١-٢٤):

أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[٥ – ٩]	٤
[١٠ – ١٤]	٨
[١٥ – ١٩]	٦
[٢٠ – ٢٤]	٢
المجموع	ن = ٢٠

الحل:

مركز الفئة م	التكرار ك	م ك	$م^٢ك$
٧	٤	٢٨	١٩٦
١٢	٨	٩٦	١١٥٢
١٧	٦	١٠٢	١٧٣٤
٢٢	٢	٤٤	٩٦٨
المجموع	ن = ٢٠	٢٧٠	٤٠٥٠

حيث أن البيانات المعطاة مبوبة فإن:

$$\text{الوسط} \quad \bar{س} = \frac{\text{مجموع (مرك)}}{ن}$$

$$= \frac{٢٧٠}{٢٠}$$

$$= ١٣,٥$$

والانحراف المعياري

$$ع = \sqrt{\frac{\text{مجموع} ((م_ر^٢ ك_ر) - ن \overline{\text{س}}^٢}{ن - ١}}$$

$$= \sqrt{\frac{٤٠٥٠ - (٢٠)(١٣,٥)^٢}{٢٠ - ١}} = \sqrt{\frac{٤٠٥}{١٩}}$$

$$= ٤,٦٢$$

تدريب (١-٢٢):

أوجد الانحراف المعياري للبيانات التالية:

مراكز الفئات	التكرار
[٢ – ٦]	٤
[٧ – ١٠]	٥
[١١ – ١٥]	١٠
[١٦ – ٢٠]	٨
[٢١ – ٢٥]	٣

ويُعرّف التباين كما يلي:

والتباين هو مربع الانحراف المعياري

ثالثاً : الانحراف المتوسط

الانحراف المتوسط	$\frac{\text{مجموع} \lvert س_ر - \overline{س} \rvert}{ن}$	إذا كانت البيانات الأصلية س١، ....، س ن معطاة
	$\frac{\text{مجموع} (\lvert م_ر - \overline{س} \rvert ك_ر)}{ن}$	للبيانات المعطاة بجدول تكراري

مثال (١-٢٥):

احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

(أ) ٥ ، ٧ ، ١٢ ، ١٦ ، ١٠

(ب)

مراكز الفئات	التكرار
٢	٢
٧	٥
١٢	٢
١٧	١

الحل:

(أ) لاحظ أن $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجموع (س}_{\text{ر}}\text{)}}{\text{ن}} = ١٠$

$$\frac{\text{مجموع } |\text{س}_{\text{ر}} - \overline{\text{س}}|}{\text{ن}} = \frac{|١٠-٥|+|١٠-٧| + |١٠-١٢| + |١٠-١٦| + |١٠-١٠|}{٥}$$

$$= \frac{٥ + ٣ + ٢ + ٦ + ٠}{٥} = \frac{١٦}{٥} = ٣,٢$$

(ب) لاحظ أن $\overline{\text{س}} = \frac{\text{مجموع (م}_{\text{ر}}\text{ك}_{\text{ر}}\text{)}}{\text{ن}} = ٨$

الآن كون الجدول التالي:

مركز الفئة م	التكرار ك	$|\text{م} - \overline{\text{س}}|$	$|\text{م} - \overline{\text{س}}|$. ك
٢	٢	٦	١٢
٧	٥	١	٥
١٢	٢	٤	٨
١٧	١	٩	٩
المجموع	ن = ١٠		٣٤

وعليه فإن متوسط الانحراف المتوسط يساوي

$$\frac{\text{مجموع } |\text{م} - \overline{\text{س}}| \text{. ك}}{\text{ن}} = ٣,٤$$

تدريب (١-٢٣):

احسب الانحراف المتوسط للبيانات التالية:

(أ) ٣ ، ٤ ، ٩ ، ١٠ ، ١٤

(ب)

مراكز الفئات	التكرار
[٥-٩]	٢
[١٠ - ١٤]	٦
[١٥ - ١٩]	١١
[٢٠ - ٢٤]	٤
[٢٥ - ٣٠]	٢

انتقل إلى تقويم ذاتي (١-٦).

الخاتمة

لقد تناولت هذه الوحدة مفهوم الاحتمال مع التركيز على الإحتمال المنتظم، حيث يحسب إحتمال حادث ما بحساب عدد الطرق التي يمكن الحصول فيها على الحادث مقسوماً على عدد كافة الإمكانات للتجربة العشوائية قيد الدراسة. ومن ثم إستعرضنا قوانين الإحتمال، وبعد ذلك تناولنا كيفية إستخدام طرق العد في حساب الإحتمالات.

وتناولت هذه الوحدة أيضاً الإحصاء الوصفي، حيث عالجنا موضوع تلخيص البيانات النوعية بإستخدام طريقة الأعمدة وطريقة القطاعات الدائرية، وكذلك تلخيص البيانات الكمية عن طريق الجداول التكرارية والمضلعات التكرارية التي يمكن الحصول منها على المنحنيات التكرارية.

وتناولنا أيضاً الطرق العددية لتلخيص البيانات الإحصائية، حيث أن هناك نوعين من المقاييس همـا:

(١) مقاييس النزعة المركزية

(٢) مقاييس التشتت

حيث يعطي النوع الأول مركز التوزيع ويعطي النوع الثاني قياساً لمدى تجانس أو تقارب البيانات قيد الدراسة. من أهم مقاييس النزعة المركزية الوسط والوسيط والمنوال بينما أكثر مقاييس التشتت إستعمالاً: المدى والانحراف المعياري والانحراف المتوسط وقد بينّا كيفية حساب هذه المقاييس لبيانات معطاة صراحة، ونعني بذلك الحالة التي تكون فيها المشاهدات الناتجة عن الدراسة معطاة، وكذلك في الحالة التي تكون المشاهدات معطاة على شكل جدول تكراري.

أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (١-١):

(١) أكتب الفضاء العيني للتجارب التالية:

(أ) رمي قطعة نقود ثلاث مرات.

(ب) ثلاث مباريات لفريقنا الوطني ورصد النتائج.

(جـ) سحب رقمين من مجموعة الأرقام {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦} بدون إرجاع.

(٢) في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين، أكتب عناصر الحوادث التالية:

$ح_١$: العدد الأصغر من العددين أكبر من ٤.

$ح_٢$: أحد العددين أو كلاهما يقبل القسمة على ٥

$ح_٣$: مجموع العددين عدد زوجي أقل من ٥.

(٣) إذا كان $ح_١$ = {١ ، ٣ ، ٨ ، ٩}

$ح_٢$ = {١ ، ١٠}

$ح_٣$ = {٣ ، ٤ ، ٥ ، ٧}

$ح_٤$ = {٤ ، ٥ ، ٦}

أي من العبارات التالية صحيحة:

(أ) $ح_١$ و $ح_٢$ منفصلان (ب) $ح_١$ و $ح_٤$ منفصلان

(جـ) $ح_٢$ و $ح_٤$ منفصلان (د) $ح_١$ و $ح_٣$ منفصلان

(هـ) $ح_٢$ و $ح_٣$ منفصلان (و) $ح_٣$ و $ح_٤$ منفصلان

تقويم ذاتي (١-٢):

(١) يبين الجدول التالي الطلبة الذين يدرسون في أحد مواد متطلبات الجامعة موزعين حسب التخصص وحسب المستوى:

المستوى \ التخصص	حاسوب	علوم تربوية
أولى	١٧	٢٣
ثانية	١٣	١٢
ثالثة	٨	٧
رابعة	١٢	١٣

إذا إخترنا أحد الطلبة عشوائياً من هؤلاء الطلبة، ما إحتمال أن يكون الطالب:

(أ) من مستوى السنة الثانية.

(ب) تخصص علوم تربوية.

(جـ) من مستوى السنة الرابعة وتخصص علوم تربوية.

(د) من مستوى السنة الثالثة أو تخصص حاسوب.

(٢) بالإعتماد على خصائص الإحتمال (*) ، أثبت أن:

$$ل(ح_{١} \cup ح_{٢}) = ل(ح_{١}) + ل(ح_{٢}) - ل(ح_{١} \cap ح_{٢})$$

(٣) إذا كان $ل(ح_{١}) = ٠,٥$ ، $ل(ح_{٢}) = ٠,٦$ ، $ل(ح_{١} \cup ح_{٢}) = ٠,٩$ ، أوجد ما يلي:

(أ) $ل(ح_{١} \cap ح_{٢})$ (ب) $ل(ح_{١} \cap \bar{ح}_{٢})$ (جـ) $ل(\bar{ح}_{١} \cup ح_{٢})$

(٤) إذا كان $ح_{١}$ و $ح_{٢}$ حادثين مستقلين وكان $ل(ح_{١} \cap ح_{٢}) = ٠,٣$ ، $ل(ح_{٢}) = ٠,٥$ ، أوجد:

(أ) $ل(ح_{١})$ (ب) $ل(ح_{١} \cup ح_{٢})$

تقويم ذاتي (١-٣):

(١) سُحبت ثلاث كرات معاً من صندوق يحتوي على ٤ كرات حمراء، ٥ صفراء ، ٣ خضراء، ما إحتمال أن تكون:

(أ) الكرات جميعها حمراء (ب) كرة واحدة على الأقل حمراء

(جـ) كرة حمراء فقط (د) الكرات مختلفة الألوان

(٢) سُحب عددان معاً من مجموعة الأعداد {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠}، ما إحتمال أن يكون:

(أ) مجموع العددين زوجياً   (ب) مجموع العددين فردياً

تقويم ذاتي (١-٤):

(١) يمثل الجدول التالي عدد العقود المبرمة في أحد الأسواق المالية في شهر معين مصنفة حسب القطاعات الإقتصادية المختلفة

القطاع	عدد العقود
الصناعي	٣٥
التأمين	٢٦
السياحي	١٧
الزراعي	٢٢

مثل البيانات مستخدماً

(أ) طريقة الأعمدة   (ب) طريقة الأقراص الدائرية

(٢) أرسم المدرج التكراري والمنحنى التكراري للبيانات المعطاة في الجدول التكراري التالي:

حدود الفئات	التكرار
١ – ٩	٧
١٠ – ١٩	١٢
٢٠ – ٢٩	١٨
٣٠ – ٣٩	١٠
٤٠ – ٤٩	٤

تقويم ذاتي (١-٥):

أوجد الوسط والوسيط والمنوال للبيانات التالية:

(أ) ٣ ، ١ ، ١٢ ، ٣ ، ٥ ، ٣ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٠

(ب)

حدود الفئات	التكرار
[١ – ٩]	٥
[١٠ – ١٦]	٨
[١٧ – ١٩]	١٠
[٢٠ – ٢٩]	١٥
[٣٠ – ٤٠]	٢

تقويم ذاتي (١-٦):

(١) أوجد المدى والانحراف المعياري والانحراف المتوسط للبيانات التالية:

٣ ، ٣ ، ٥ ، ٨ ، ١١

(٢) أوجد الانحراف المعياري والانحراف المتوسط للبيانات التالية:

حدود الفئات	التكرار
[٠ – ٤]	٨
[٥ – ٧]	١٠
[٨ – ١٠]	٥
[١١ – ١٥]	٤
[١٦ – ٢٠]	٣

المصادر والمراجع

(١) أبو صالح، محمد وعوض، عدنان، (١٩٨٣)، «**مقدمة في الإحصاء**»، مركز الكتب الأردني، عمان، الأردن.

(٢) المنصوب، محمد، (١٩٩٨)، «**مفاهيم أساسية في الإحصاء**»، منشورات دار الخبرة، صنعاء.

(3) Mendenhall, W., Beaver, R.J. and Beaver, B.M., (2003), **Introduction to Probability and Statistics**, Eleventh edition, Brooks/Cole, U.S.A.

(4) Weiss, N., (1999), **Introductory Statistics**, Addison Wesley, N.Y., U.S.A.

الوحـــدة الثانيــة

الوحـــدة الثانية

الهندســة

إعـداد :

أ.د. مفيـد عـزام

محتويات الوحدة الدراسية

المواد المساندة للوحدة الدراسية

١ – المادة المرئية : الهندسة

٢ – نشاط حاسوبي : توضيح المفاهيم الهندسية

الأهداف التعليمية للوحدة الدراسية

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

(١) يتعرف البناء الرياضي لهندسة اقليدس في المستوى.
(٢) يتعرف المستقيمات والأشعة والقطع المستقيمة.
(٣) يتعرف الزوايا المتتامة والمتكاملة والمتبادلة والمتناظرة والمتحالفة.
(٤) يحسب قيم زوايا معينة.
(٥) يتعرف المثلث متطابق الضلعين وخصائصه.
(٦) يستخدم خصائص المثلث المتطابق الضلعين في حساب بعض المقادير.
(٧) يستخدم تطابق المثلثات في اثبات بعض النظريات وايجاد بعض المقادير المجهولة.
(٨) يتعرف المضلعات وخصوصاً متوازي الأضلاع والمربع والمستطيل والمعين.
(٩) يثبت بعض خصائص متوازي الأضلاع.
(١٠) يتعرف المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية.
(١١) يحسب حجوم بعض المجسمات وكذلك المساحة الجانبية لها.

المقدمة

ترجع بدايات الهندسة الى الحضارات القديمة كالحضارة المصرية القديمة وحضارة ما بين النهرين، ولكن من قام بتنظيم موضوع الهندسة بشكل رياضي يعتمد على ما يُسمى بالنظام الاستقصائي هو العالم اليوناني اقليدس (٣٢٣-٢٨٣ قبل الميلاد) والذي اعتمد على النتائج التي توصل لها العلماء في الحضارات التي سبقته وكانت هذه الحقائق تعتمد أساساً على التجربة والملاحظة، ونظمها ووضع الأسس الرياضية لها، ومن ثم قام باثبات بعض النظريات والتي يعتبر البعض منها من النظريات الهامة في الهندسة حتى يومنا هذا.

وكأي نظام رياضي فقد اعتمد اقليدس بناء النظام الاستقصائي باعطاء بعض المفردات ومن ثم وضع بعض المسلّمات والتي اشتق منها بعض النظريات وقام باثباتها وبرهنتها من المسلّمات التي وضعها، بعد ذلك أثبت نظريات أخرى بالاعتماد على ما سبق وأثبته من نظريات وكذلك من المسلّمات.

لقد جاءت هذه الوحدة في خمسة بنود تناولت البنود الثلاثة الأولى بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة المستوية والمستقيمات والزوايا والمثلث وخصائصه وكذلك الأشكال الرباعية وخصائصها، وجاءت هذه البنود لتحقق الأهداف التسعة الأولى.

بينما جاء البندان الرابع والخامس ليحققان الأهداف المتبقية من هذه الوحدة، وذلك من خلال معالجتهما للمفاهيم الأساسية للهندسة الفضائية وبعض المجسّمات كالكرة والمخروط والهرم، وتناولت كذلك بعض خصائص هذه المجسّمات كالحجم والمساحة الجانبية.

مفاهيم أولية في الهندسة المستوية

ان احدى الانجازات الهامة للحضارة الاغريقية هي استحداث النظام الاستقصائي للهندسة (Inductive System) والذي يعتمد أساساً على بعض المفردات غير المعرّفة وبعض المسلّمات والتي هي عبارة عن جمل اخبارية واضحة نفترض صحتها دون اعطاء برهان لها، بعد ذلك تعرّف بعض العلاقات والمصطلحات ومن ثم استخدام العلاقات والمسلّمات لاثبات بعض النظريات، بعدها تستخدم هذه النظريات لاثبات نظريات جديدة.

ولقد وضح اقليدس والذي عاش في الاسكندرية في الفترة ما بين ٣٢٣ و٢٨٣ قبل الميلاد في كتابه الشهير "العناصر The Elements" الخطوات الأساسية للنظام الاستقصائي، كما وضمّن كتابه بعض النظريات الهندسية التي تمّ تطويرها في الحضارات القديمة التي سبقته كالحضارة المصرية القديمة وحضارة ما بين النهرين. وقد قام العرب في عهد هارون الرشيد (٧٨٦–٨٠٩ م) بترجمة كتاب اقليدس هذا الى اللغة العربية، وقد تمّت ترجمة النسخة العربية من كتاب اقليدس الى اللغة الانجليزية عام ١١٢٠م، ولم تظهر النسخة الانجليزية كاملة الاّ في عام ١٥٧٠ ميلادية وذلك على يد العالِم هنري بيلنجزلي.

ولقد بدأ اقليدس بالمفردات التالية:

النقطة، المستقيم أو الخط، المستوي

وعلماً بأن هذه المفردات مفهومة بذاتها الاّ أنه لا يمكن اعطاء تعريف رياضي لها، ومن الممكن وصف هذه المفردات كأن يُقال بأن النقطة لا طول ولا عرض لها، فللنقطة موقع وليس لها مقدار، والمستقيم هو مجموعة من النقاط كتلك التي يمكن رسمها باستخدام المسطرة، والمستوى هو سطح منبسط مثل سطح اللوح وسطح الطاولة. وعندما نتحدث عن المستقيم فاننا نقصد الخط المستقيم والذي يمتد الى مالانهاية من الطرفين، وقد وضع اقليدس مسلّمات بنى عليها بعض المفاهيم الهندسية.

والمسلّمات لا توضع جزافاً، والاّ لما كان للهندسة فائدة تُرجى، ومن أهم الشروط التي يجب توافرها في المسلّمات هو أن لا تكون متناقضة أو أن لا تؤدي الى نتائج متناقضة.

واليك عزيزي الدارس بعضاً من هذه المسلّمات.

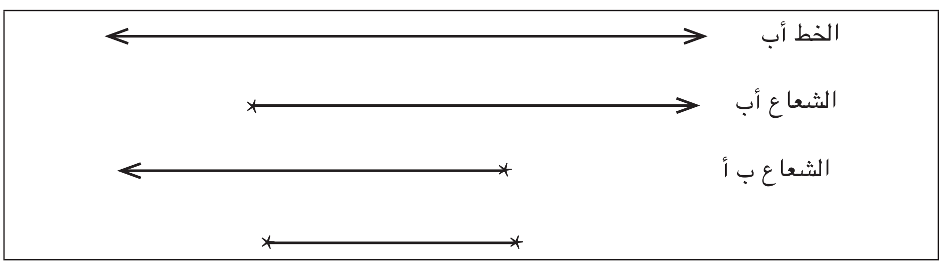
(١) تقع على أي خط مستقيم نقطتان على الأقل.

(٢) لأي خط مستقيم هناك نقطة لا تقع عليه.

(٣) هناك خط مستقيم وحيد يمكن رسمه بحيث يمر بنقطتين معلومتين.
(٤) لأي مستوى مُعطى، هناك نقطة على الأقل لا تقع عليه.
(٥) هناك مستوى وحيد يحتوي على مستقيم معلوم ونقطة لا تقع عليه (تُسمى نقطة خارجة).
(٦) هناك مستوى وحيد يحتوي على ثلاث نقاط لا تقع على خط مستقيم.
(٧) اذا وقعت نقطتان من خط مستقيم في مستوى معيّن فان الخط بأكمله يقع في ذلك المستوى.
(٨) يمكن نقل الشكل الهندسي أو المجسم في المستوى أو في الفضاء من مكان الى الآخر دون تغيير الشكل أو الحجم.

من الجدير بالذكِر أن هناك مسلّمات أخرى قد وردت في كتاب اقليدس ولكننا سنكتفي بذكِر المسلّمات التي سبق وذكرناها.

باستخدام المفردات غير المعرّفة وهي النقطة والخط (المستقيم)، والمستوى يمكن تعريف بعض المصطلحات الهندسية والتي ستستخدم لتطوير المفاهيم الهندسية.
الشعاع : هو خط مستقيم يبدأ من نقطة معينة ويمتد الى مالانهاية.
القطعة المستقيمة : هي جزء من خط مستقيم وللقطعة المستقيمة نقطتي نهاية.
أنظر الشكل (٢-١)



الشكل (٢-١)

ويُستخدم الرمز $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ للدلالة على المستقيم المار في النقطتين أ، ب.
والرمز $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ للدلالة على الشعاع أب، وتُسمى أ نقطة البداية للشعاع.
والرمز $\overline{\text{أ ب}}$ للدلالة على القطعة المستقيمة أب.

لاحظ عزيزي الدارس أننا استخدمنا الكلمات: "خط"، "مستقيم"، "خط مستقيم" ككلمات مترادفة، مع أن هناك بعض المؤلفين الذي يميزوا بين الخط والخط المستقيم، ولكننا سنستخدم هذه الكلمات لتعطي نفس المدلول.

مثال (٢-١): اذا كانت د، هـ، و ثلاث نقاط تقع على خط مستقيم

(أ) ما العلاقة بين المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$

(ب) كم قطعة مستقيمة يمكن الحصول عليها باستخدام النقاط الثلاث ؟ ما هي ؟

(جـ) كم شعاعاً يمكن الحصول عليه باستخدام النقاط الثلاث ؟ ماهي؟.

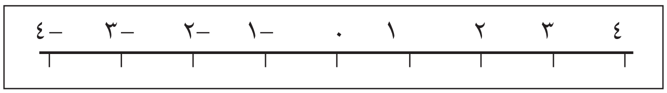
الحل:

(أ) المستقيمان متطابقان لأن بينهما نقطتان مشتركتان.

(ب) ثلاث قطع هي : $\overline{\text{د هـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ ، $\overline{\text{د و}}$.

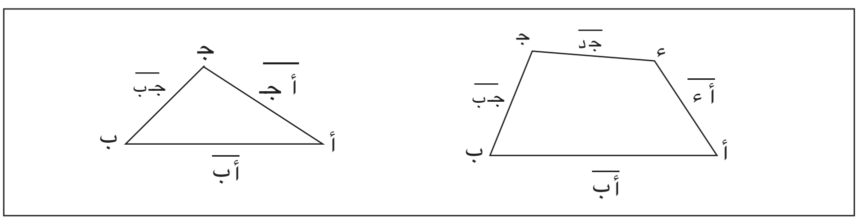
(جـ) هناك أربع أشعة هي : $\overrightarrow{\text{د هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ و}}$ ، $\overrightarrow{\text{هـ د}}$ ، $\overrightarrow{\text{و هـ}}$

وكما تعلم عزيزي الدارس أن الخط المستقيم يُستخدم لتمثيل مجموعة الأعداد الحقيقية، حيث أن هناك تقابل بين مجموعة الأعداد الحقيقية ونقاط الخط المستقيم، أنظر الشكل (٢-٢).



الشكل (٢-٢)

وباستخدام القطع المستقيمة يمكن تعريف بعض الأشكال الهندسية كالمثلث والمضلع، فمثلاً يُعرّف المثلث بأنه اتحاد ثلاث قطع مستقيمة متقاطعة، ويُعرّف الشكل الرباعي بأنه اتحاد أربع قطع مستقيمة، أنظر الشكل (٢-٣).



الشكل (٢-٣)

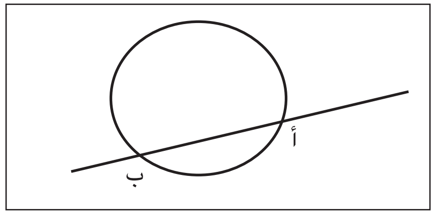
ونعبّر عن المثلث (وكذلك عن المضلّع) بذكرِ رؤوسه، ففي الشكل (٢-٣) نقول "المثلث أ ب جـ" وقد نستخدم الرمز Δ أ ب جـ للدلالة على المثلث الذي هو اتحاد القطع المستقيمة، $\overline{\text{أ ب}}$ $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

هناك أشكال هندسية أخرى، من أهمها:

الدائرة: والتي تُعرّف بأنها مجموعة النقاط التي يكون بعدها عن نقطة معلومة مقداراً ثابتاً، ويُسمى المقدار الثابت "نصف قطر الدائرة"، ولرسم دائرة بنصف قُطر مُعطى نستخدم الفرجار بفتحة مساوية لنصف قُطر الدائرة ونركز رأسه في مركز الدائرة ونحركه ليرسم الدائرة.

اذا كان لدينا دائرة ومستقيم في المستوى، فان هناك ثلاث حالات هي:

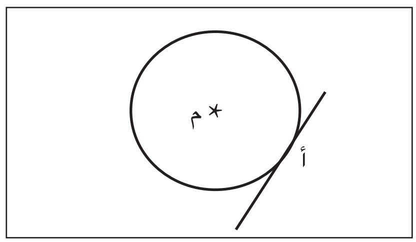
(١) يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين مثل أ، ب، (أنظر الشكل (٢-٤)، في هذه الحالة تُسمى القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ "وتراً للدائرة".



الشكل (٢-٤)

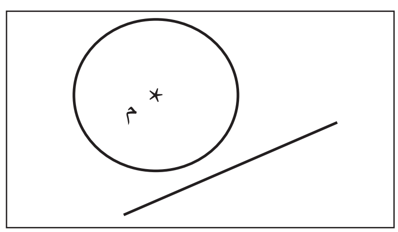
اذا كان مركز الدائرة م يقع على المستقيم، فتُسمى القطعة المستقيمة "قطر الدائرة".

(٢) اذا قطع المستقيم الدائرة في نقطة واحدة مثل أ، فيُسمى المستقيم "مماساً للدائرة"، وتُسمى النقطة أ نقطة التماس. أنظر الشكل (٢-٥)



الشكل (٢-٥)

(٣) لا توجد نقاط مشتركة بين الدائرة والمستقيم، كما في الشكل (٢-٦).



الشكل (٢-٦)

تدريب (٢-١):

اذا كان م$_١$، م$_٢$ مستقيمين ووقعت النقطتان أ، ب على المستقيمين م$_١$، م$_٢$، ماذا نستطيع القول عن المستقيمين م$_١$، م$_٢$ ؟ اذكر جميع الحالات الممكنة.

تدريب (٢-٢):

كم مستقيم يمر في:

(أ) نقطة مُعطاة (ب) نقطتين معلومتين (جـ) ثلاث نقاط ليست على استقامة

- انتقل الى تقويم ذاتي (٢–١).

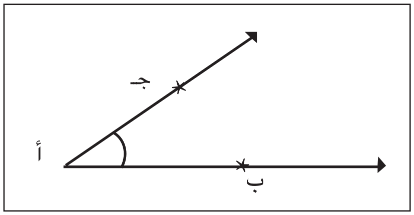
المستقيمات والزوايا

لقد تناولنا في البند السابق طريقة البناء الهندسي التي استخدمها اقليدس وقمنا بتعريف بعض المصطلحات مثل الشعاع والقطعة المستقيمة والمثلث والدائرة، سنقوم الآن بتعريف الزاوية ودراسة بعض خصائص الزوايا وكذلك المستقيمات.

تعريف (٢ - ١)

اذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أجـ}}$ شعاعين، فيُسمى اتحاد هذين الشعاعين "زاوية" رأسها أ، أنظر الشكل (٢–٧).

ويُسمى الشعاعان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أج}}$ " أضلاع الزاوية "، والنقطة أ تُسمى "رأس الزاوية".



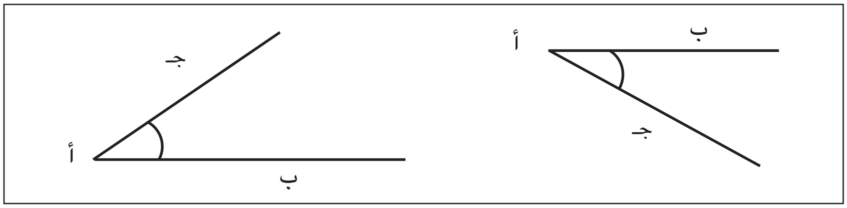
الشكل (٢–٧)

وقد يعبّر عن مثل هذه الزاوية بعدة طرق منها: (١) $\angle$ جـ أ ب، (٢) $\angle$ ب أ جـ، وفي بعض الحالات نستخدم الرمز $\angle$ أ .

يعطي التعريف السابق أبسط أنواع التعريفات لمفهوم الزاوية، وهناك تعريفات أخرى نذكر أحدها، وذلك لازالة اللبس الذي قد يقع ان رأيت تعريفات أخرى للزاوية في كتب أخرى.

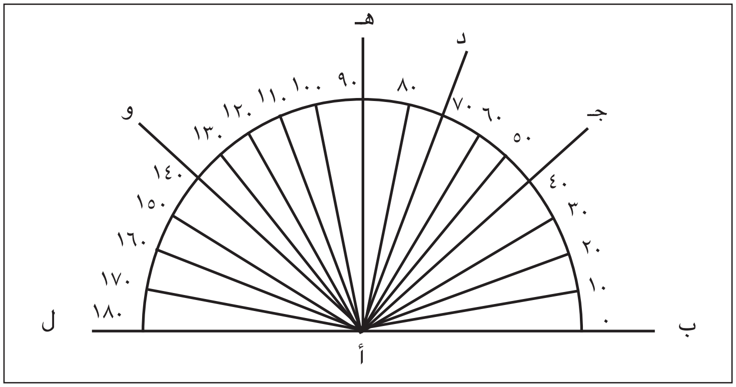
يمكن أن نفكر بالزاوية بأنها ناتجة عن دوران شعاع حول نقطة بدايته، ويُسمى الوضع الأصلي للشعاع بالضلع الابتدائي والضلع الآخر الضلع النهائي. لاحظ أن الدوران قد

يكون باتجاهين، في هذه الحالة تكون الزوايا الناتجة مختلفة أحدهما باتجاه عقارب الساعة والآخر عكس اتجاه عقارب الساعة، أنظر الشكل (٢–٨).



الشكل (٢–٨)

* تُسمى الزاوية الناتجة عن دوران الشعاع بعكس اتجاه عقارب الساعة "زاوية موجبة"، بينما تُسمى الزاوية الناتجة عن دوران الشعاع باتجاه عقارب الساعة "زاوية سالبة".
وتقاس الزاوية عادة بالدرجات باستخدام المنقلة، أنظر الشكل (٢–٩).



الشكل (٢–٩)

علماً بأن الزاوية هي اتحاد قطعتين مستقيمتين، فاننا نستخدم رمز الزاوية للدلالة على قياسها، ففي الشكل (٢–٩) :

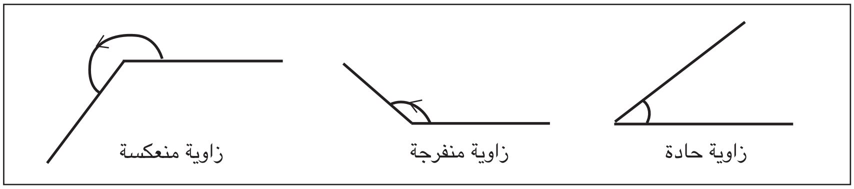
∠ ب أ جـ = ٤٠°، ∠ ب أ د = ٧٠°، ∠ ب أ هـ = ٩٠°، ∠ ب أ و = ١٤٠°،
∠ ب أ ل =١٨٠°

تُسمى الزاوية التي قياسها ٩٠° " زاوية قائمة "
وتُسمى الزاوية التي قياسها ١٨٠° " زاوية مستقيمة"

* في الشكل أعلاه الزاوية ب أ هـ قائمة، وكذلك الزاوية هـ أ ل، بينما الزاوية ب أ ل زاوية مستقيمة.

تُسمى الزاوية التي قياسها بين الصفر و ٩٠°، زاوية حادة
تُسمى الزاوية التي قياسها بين ٩٠°، ١٨٠°، زاوية منفرجة
تُسمى الزاوية التي قياسها أكثر من ١٨٠°، زاوية منعكسة

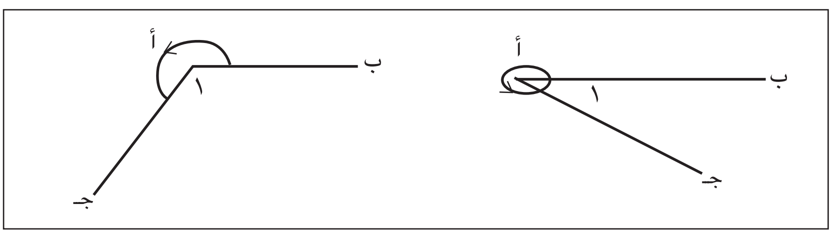
يبين الشكل (٢-١٠) بعض أنواع الزوايا.



الشكل (٢-١٠)

بينّا فيما سبق كيفية استخدام المنقلة في قياس زاوية حادة أو زاوية منفرجة،
والسؤال الآن هو كيف تستطيع استخدام المنقلة في ايجاد قياس زاوية منعكسة ؟

للاجابة على هذا السؤال، لاحظ عزيزي الدارس أنه اذا كان $\overleftarrow{\text{أب}}$ ، $\overleftarrow{\text{أج}}$ ، شعاعين وكانت الزاوية بينهما زاوية منعكسة، فتكون الزاوية الأخرى من الشعاعين (والمشار لها بالرمز " ١") في الشكل (٢-١١) اما زاوية منفرجة أو زاوية حادة، نقيس هذه الزاوية باستخدام المنقلة كما سبق وبينّا،
وتكون قياس الزاوية المنعكسة تساوي ٣٦٠° - قياس الزاوية (١)



الشكل (٢-١١)

سؤال: هل تستطيع ايجاد قياس زاوية منعكسة بطريقة أخرى ؟

تدريب (٢-٣):

أوجد قياس الزوايا التالية، والمبينة في الشكل (٢-٩):

(أ) < جـ أ د (ب) < د أ و (جـ) < جـ أ ل

يمكن تجزئة الزاوية التي قياسها درجة واحدة الى ستين جزءاً متساوٍ، يُسمّى كل جزء منها "دقيقة" ويرمز لها بالرمز " َ "، يوضع فوق العدد الذي يمثّل الدقائق.

فمثلاً اذا كان < ب أ جـ = ١٣َ ٤٠° فهذا يعني أن قياس الزاوية ب أ جـ يساوي ٤٠ درجة و ١٣ دقيقة.

وكذلك تقسم الدقيقة الى ٦٠ جزءٍ متساوٍ، يُسمى كل جزء منها "ثانية"، ويعبر عن الثانية بالرمز " ً " يوضع فوق العدد الذي يمثل الثواني.

مثال (٢-٢):

< أ ب جـ = ٢٢" ١٣َ ٤٠° يعني أن قياس الزاوية هو ٤٠ درجة و١٣ دقيقة و٢٢ ثانية.

وعليه فان الدرجة = ٦٠ دقيقة = ٣٦٠٠ ثانية.

مثال (٢-٣):

في الشكل (٢-١٢)، اذا كانت < أ ب جـ = ٤٦َ ٣٥° ، < جـ ب د = ٣٢َ ٤٠°، أوجد < أ ب د.

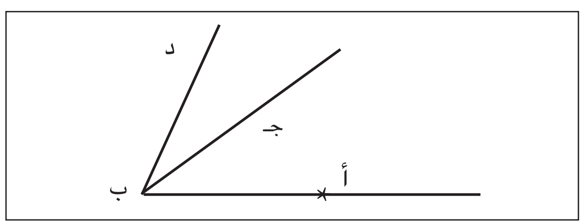
الحل:

< أ ب د = < أ ب جـ + < جـ ب د

= ٤٦َ ٣٥° + ٣٢َ ٤٠°

= ٧٨َ ٧٥°

= ١٨َ ٧٦°



الشكل (٢-١٢)

تدريب (٢-٤):

اذا كانت < أ = ١٨َ ٤٢° ، < ب = ٤٩َ ١٧° ، < جـ = ٥٢َ ٩٨° أوجد :

(أ) < أ + < ب (ب) < أ + < جـ (جـ) < أ + < ب + < جـ

سنعطي الآن تعريفاً لبعض المفردات والمتعلقة بالزوايا :

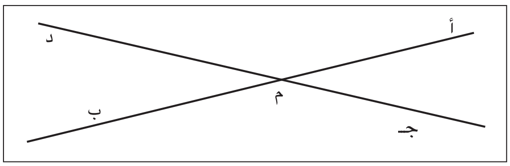
تعريف (٢ - ٢)

(أ) نقول أن الزاويتين متتامتان اذا كان مجموع قياسهما يساوي °٩٠.

(ب) نقول أن الزاويتيين متكاملتان اذا كان مجموع قياسهما يساوي °١٨٠.

(جـ) نقول بأن الشعاعين متعامدان اذا كان قياس الزاوية بينهما °٩٠.

اذا تقاطع مستقيمان مثل $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ و $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ في نقطة مثل م



الشكل (٢–١٣)

فنقول أن الزاويتيين < أ م جـ ، < د م ب متقابلتان بالرأس

وكذلك الزاويتيين < أ م د ، < جـ م ب

أنظر الشكل (٢–١٣)

نظريـة (٢-١):

الزوايا المتقابلة بالرأس متطابقة

المعطى:

اذا تقاطع المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أب}}$ و $\overleftrightarrow{\text{جـد}}$ في النقطة م ، أنظر الشكل (٢–١٣)

المطلوب: اثبات أن

(أ) < أ م جـ = < ب م د

(ب) < أ م د = < جـ م ب

البرهان:

(أ) حيث أن < أ م جـ + < أ م د = °١٨٠

< ب م د + < أ م د = °١٨٠

فان < أ م جـ + < أ م د = < ب م د + < أ م د

ومنها < أ م جـ = < ب م د.

(ب) يُترك للقارىء.

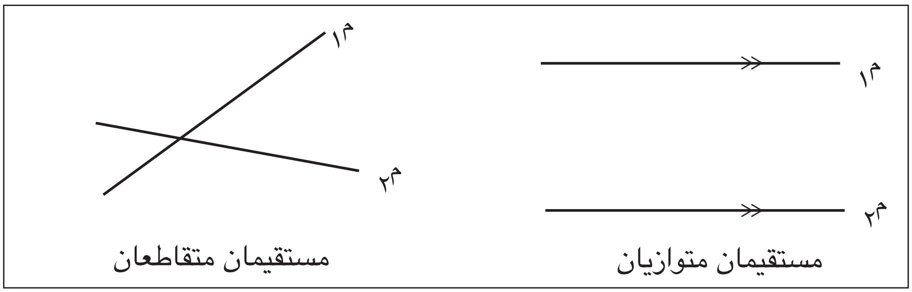
لاحظ عزيزي الدارس أنه كان $م_١$، $م_٢$ مستقيمان في المستوى، فهناك ثلاثة أوضاع ممكنة لهذين المستقيمين:

(١) هناك نقطتان مشتركتان بين $م_١$، $م_٢$ في هذه الحالة المستقيمان منطبقين أي أنهما مستقيم واحد.

(٢) هنالك نقطة واحدة فقط تقع على المستقيمين، في هذه الحالة نقول أن المستقيمين يتقاطعان في هذه النقطة.

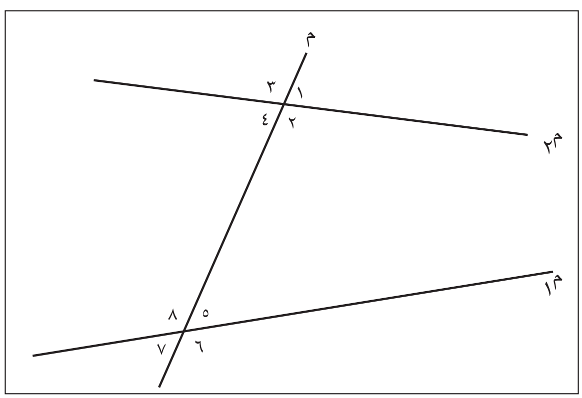
(٣) لا يوجد نقاط مشتركة بين المستقيمين، في هذه الحالة نقول أن المستقيمين متوازيان.

أنظر الشكل (٢-١٤)



الشكل (٢-١٤)

من الممكن استخدام فكرة تقاطع المستقيمات الى اعطاء تعريفات لأزواج من الزوايا تحقق شرطاً معيناً، ولتعريف مثل هذه الأزواج لنأخذ الزوايا المبينة في الشكل (٢-١٥).



الشكل (٢-١٥)

نقول أن الزاويتين $<$ ١، $<$ ٥ في وضع تناظر

وأن الزاويتين $\angle$ ٢، $\angle$ ٥ في وضع تحالف

وأن الزاويتين $\angle$ ٤، $\angle$ ٥ في وضع تبادل

لاحظ عزيزي الدارس أن:

(أ) $\angle$ ٢ ، $\angle$ ٦ في وضع تناظر،

وكذلك $\angle$ ٣، $\angle$ ٨

وكذلك $\angle$ ٤، $\angle$ ٧.

(ب) $\angle$ ٤ ، $\angle$ ٨ في وضع تحالف.

(جـ) $\angle$ ٢ ،$\angle$ ٨ في وضع تبادل.

لنأخذ المسلّمة التالية والخاصة بالمستقيمات المتوازية

مسلّمة: يكون المستقيمان متوازيين اذا وفقط اذا كان هناك زاويتان في وضع تناظر متطابقتين.

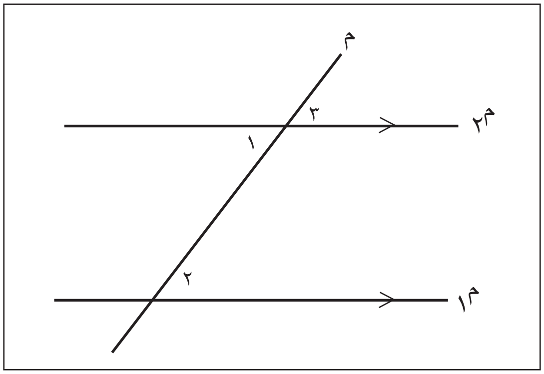
تعطي النظرية التالية خاصية للمستقيمات المتوازية

نظرية (٢-٢):

اذا كان $م_١$، $م_٢$ مستقيمين متوازيين، وكان المستقيم م قاطع لهما، فان الزوايا المتبادلة الناتجة متطابقة.

البرهان:

اذا كان $م_١$، $م_٢$ مستقيمين متوازيين وكان المستقيم م قاطع لهما، أنظر الشكل (٢-١٦)

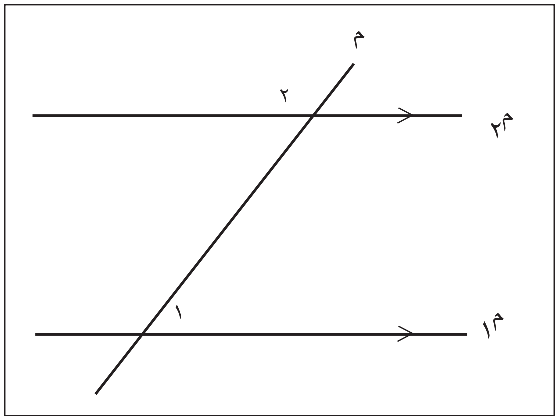


الشكل (٢-١٦)

المطلوب: اثبات أن $\angle$ ١ = $\angle$ ٢

حيث أن   ∠ ٣ = ∠ ١ (بالتقابل بالرأس)
∠ ٣ = ∠ ٢ (بالتناظر)
وعليه فان ∠ ١ = ∠ ٢. وهو المطلوب.

تدريب (٢-٥):
في الشكل (٢-١٧)، م١، م٢ مستقيمان متوازيان. أثبت أن ∠ ١، ∠ ٢ متكاملتان.



الشكل (٢-١٧)

● انتقل الى تقويم ذاتي (٢-٢).

المضلعات وخصائصها

سنبدأ بدراسة أهم الأشكال الهندسية وهو المثلث، لأننا نستطيع الحصول على خصائص المضلعات باستخدام خواص المثلث. سبق وعرّفنا المثلث بأنه مضلع مغلق مكون من اتحاد ثلاث قطع مستقيمة تُسمى هذه القطع "أضلاع المثلث"، وقد يقال أيضاً بأن المثلث هو شكل هندسي له ثلاثة أضلاع مستقيمة، وغالباً ما يستدل على المثلث برؤوسه، فيقال المثلث أ ب جـ (ويُرمز له بالرمز Δ أ ب جـ) للدلالة على المثلث الناتج من اتحاد القطع المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$، $\overline{\text{ب جـ}}$.

أي أن Δ أ ب جـ   هو المثلث الذي رؤوسه من النقاط أ، ب، جـ.

هناك أنوا ع من المثلثات نذكر منها:

المثلث قائم الزاوية: وهو مثلث قياس أحد زواياه يساوي ٩٠°.

المثلث متطابق الضلعين: هو مثلث فيه ضلعان متطابقان.

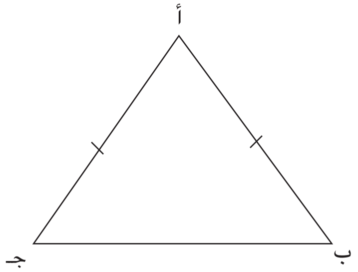
المثلث متطابق الأضلاع: هو مثلث أضلاعه الثلاثة متطابقة.

لاحظ عزيزي الدارس بأنه علماً بأن أضلاع المثلث هي قطع مستقيمة، فاننا سنستخدم الرمز أ ب بدلاً من $\overline{\text{أ ب}}$، للدلالة على أحد أضلاع المثلث أ ب جـ.

اذا كان أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ

فاننا نضع نفس الاشارة على الضلعين المتطابقين، أنظر الشكل (٢–١٨)

وتُسمى النقطة أ "رأس المثلث" والضلع ب جـ "قاعدة المثلث"

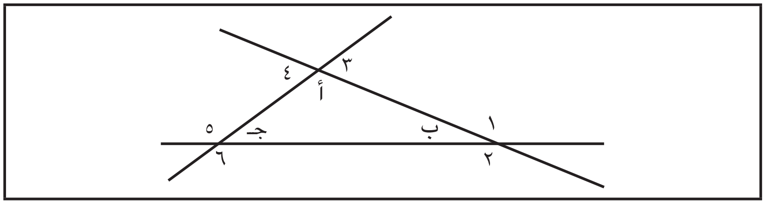


الشكل (٢–١٨)

وفي المثلث القائم الزاوية يُسمى الضلع المقابل للزاوية القائمة «الوتر»

تعريف (٧ - ٣)
تُعرّف الزاوية الخارجة لمثلث ما بأنها الزاوية التي أحد أضلاعها في المثلث والضلع الآخر امتداد للضلع المجاور له.

لاحظ أنه لأي مثلث هناك ست زوايا خارجة، أنظر الشكل (٢–١٩).



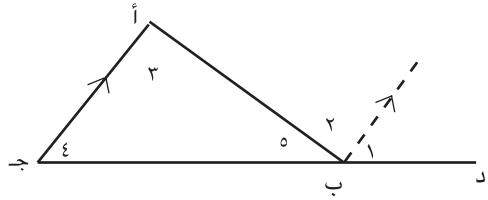
الشكل (٢–١٩)

ففي الشكل (٢–١٩) الزوايا > ١، > ٢، > ٣، > ٤، > ٥، > ٦ هي زوايا خارجة للمثلث أ ب جـ..

لاحظ عزيزي الدارس، أنه اذا كان أ ب جـ مثلث، اذا مدّ الضلع جـ ب على استقامته

باتجاه ب، واذا رسمنا من النقطة ب مستقيماً مثل ب د يوازي الضلع جـ أ، أنظر الشكل (٢-٢٠)

(لاحظ أننا وضعنا نفس الاشارة على المستقيمين المتوازيين)



الشكل (٢-٢٠)

فان: ∠ ١ = ∠ ٤ (زاويتيين متناظرتين)

∠ ٢ = ∠ ٣ (زاويتيين متبادلتين)

وعليه فان ∠ ١ + ∠ ٢ = ∠ ٤ + ∠ ٣ ... (١)

أي أن الزاوية الخارجة ∠ د ب أ = ∠ ٣ + ∠ ٤

وبملاحظة أن ∠ ١ + ∠ ٢ + ∠ ٥ = ١٨٠° (زاوية مستقيمة)

فان ∠ ٤ + ∠ ٣ + ∠ ٥ = ١٨٠°.

ان ما سبق ذكره يثبت النظرية التالية:

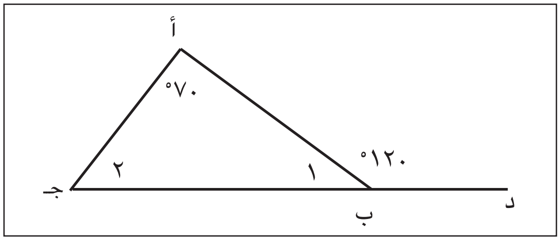
نظرية (٢-٤):

(أ) في أي مثلث يكون قياس الزاوية الخارجة يساوي مجموع قياسي الزاويتيين الداخلتين ما عدا المجاورة لها.

(ب) مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°

مثال (٢-٤):

في الشكل (٢-٢١)، أوجد قياس ∠ ١، ∠ ٢



الشكل (٢–٢١)

الحل:

حيث أن ∠ د ب أ زاوية خارجة فان

١٢٠° = ٧٠° + ∠ ٢ ومنها ∠ ٢ = ٥٠°

وحيث أن مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠° فان

∠ ١ + ∠ ٢ + ٧٠° = ١٨٠°

ومنها فان ∠ ١ = ١٨٠° – ٧٠° – ∠ ٢

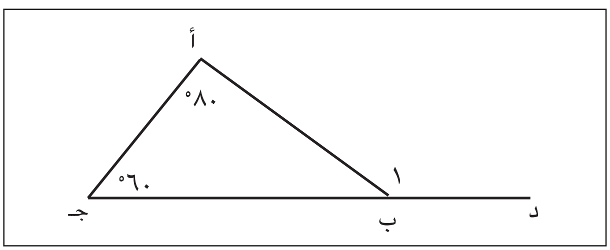
= ١٨٠° – ٧٠° – ٥٠°

= ٦٠°.

سؤال : هل هناك حل آخر؟

تدريب (٢-٦):

في الشكل (٢–٢٢)، أوجد قياس ∠ ١



الشكل (٢–٢٢)

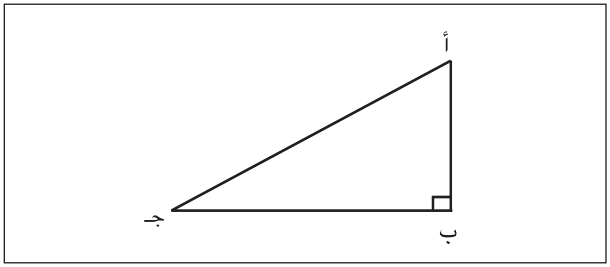
هناك نظرية هامة وتتعلق بأطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية وتُعرّف هذه النظرية بنظرية فيثاغورس، سنورد نصها فيما يلي:

نظرية (٢-٥):

في المثلث القائم الزاوية يكون مربع طول الوتر يساوي مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين، أي أنه اذا كان أ ب جـ قائم الزاوية في ب فان:

(أ جـ)^{٢} = (أ ب)^{٢} + (ب جـ)^{٢}

انظر الشكل (٢–٢٣)



الشكل (٢–٢٣)

وعكس النظرية أيضاً صحيح، بمعنى أنه اذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين يساوي مربع طول الضلع الثالث في مثلث ما، فيكون المثلث قائم الزاوية.

مثال (٢-٥):

اذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، وكان أ ب = ٦ سم وكان ب جـ = ٨سم، أوجد طول أ جـ.

الحل:

حيث أن المثلث قائم الزاوية في ب فان:

$$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$$
$$= (٦)^2 + (٨)^2$$
$$= ١٠٠$$

وعليه فان أ جـ = ١٠ سم.

تدريب (٢-٧):

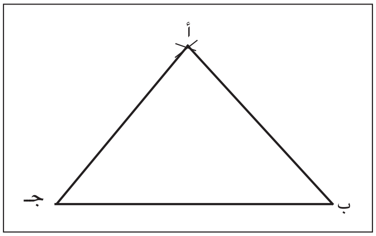
اذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ، وكان أ ب = ٥ سم وكان أ جـ = ٣سم، أوجد طول ب جـ.

تدريب (٢-٨):

(أ) مثلث أطوال أضلاعه ١٥ سم، ٩ سم، ١٢ سم، هل المثلث قائم الزاوية ؟

(ب) اذا كان أ ب = ٧ سم، ب جـ = ١٠ سم، جـ د = ١٣ سم. هل المثلث أ ب جـ قائم الزاوية ؟

لاحظ عزيزي الدارس أنه بامكاننا تحديد المثلث تحديداً كاملاً بمعرفة أطول أضلاعه الثلاثة. ولرسم مثلث مثل أ ب جـ اذا علمت أطول أضلاعه فاننا نرسم قطعة مستقيمة طولها يساوي طول ب جـ، ثم نفتح الفرجار فتحة مساوية لطول الضلع أ ب ونركز الفرجار في ب ونرسم قوساً، ثم نفتح الفرجار فتحة مساوية لطول أ جـ ونركز الفرجار في جـ ونرسم قوساً يقطع القوس الأول في نقطة أ. ثم نرسم الضلعين أب، أجـ
وعليه يكون المثلث أ ب جـ هو المثلث المطلوب، أنظر الشكل (٢-٢٤).

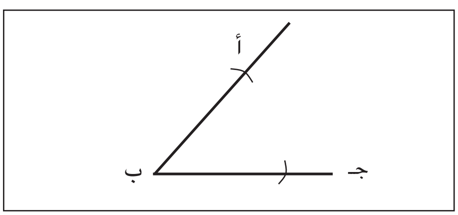


الشكل (٢-٢٤)

من الجدير بالملاحظة عزيزي الدارس أنه اذا كان مجموع أطوال الضلعين أ ب، أ جـ أقل من طول الضلع ب جـ، فان القوسين لا يتقاطعان، وعليه نخلص الى النتيجة التالية:

نتيجة: في أي مثلث يكون مجموع طولي أي ضلعين أكبر من طول الضلع الثالث.

هناك طرق أخرى لتحديد المثلث نذكر منها:
(١) اذا عُرف طول ضلعان في المثلث والزاوية المحصورة بينهما،



الشكل (٢-٢٥)

(لرسم مثل هذا المثلث نرسم الزاوية المعلومة ولتكن ب، وبفتحتين مساويتين لأطوال الضلعين أب، جـ ب نقطع ضلعي الزاوية في أ، جـ على التوالي)، أنظر الشكل (٢-٢٥) أعلاه. ثم نرسم الضلع أجـ
(٢) اذا عُلم قياس زاويتان وطول الضلع الواصل بينهما.

تدريب (٢-٩):

بيّن كيف نرسم المثلث أ ب جـ

اذا علمت أن < ب = ٦٠° ، < جـ = ٧٠° وطول ب جـ = ١٠ سم.

تعريف (٢ - ٥)

نقول أن المثلثين متطابقان اذا كان لهما نفس الشكل ونفس القياسات، أي أننا نستطيع تحريك أحد المثلثين لينطبق تماماً على المثلث الآخر.

ففي حالة تطابق مثلثين تكون الأضلاع المتقابلة متطابقة وكذلك الزوايا. من تعريف تطابق المثلثات ومن الطرق التي ذكرنا لتحديد المثلث نخلص الى النظرية التالية:

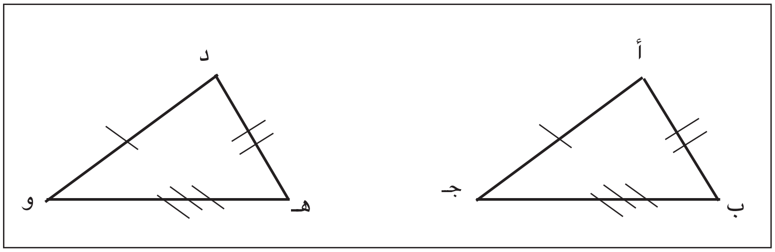
نظرية (٢-٦):

ينطبق مثلثان في أي من الحالات التالية:

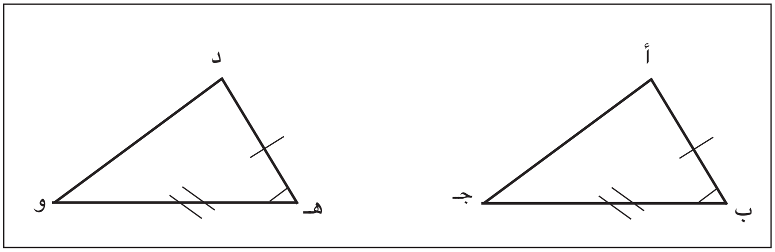
(١) تساوي أطوال أضلاعهما المتناظرة.

(٢) اذا تطابق فيهما ضلعان متناظران وقياس الزاوية المتشكلة من الضلعين.

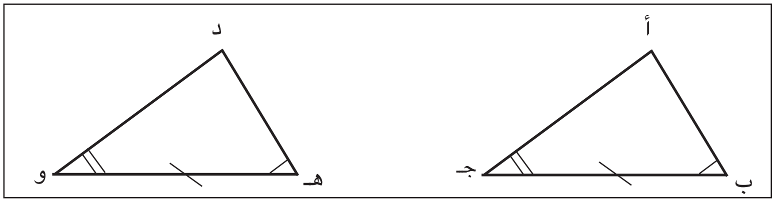
(٣) اذا تطابق فيهما قياسي زاويتين وطول أحد الاضلاع.



الشكل (٢-٢٦)



الشكل (٢-٢٧)



الشكل (٢–٢٨)

تعطي الأشكال (٢–٢٦)، (٢–٢٧)، (٢–٢٨) توضيحاً للحالات الثلاث الواردة في النظرية.

ملاحظة: لاحظ أننا وضعنا نفس الاشارة على الزوايا والأضلاع المتطابقة.

من الملاحظ هنا ما يلي:

(١) اذا تطابق مثلثان بتطابق الأضلاع تكون الزوايا المتقابلة متطابقة

أي أن < أ = < د ، < ب = < هـ ، < جـ = < و ، (الشكل (٢–٢٦))

(٢) اذا تطابق مثلثان بضلعين وزاوية محصورة ، (الشكل (٢–٢٧))

يكون < أ = < د ، < جـ = < و ، أ جـ = د و.

(٣) اذا تطابق مثلثان بزاويتين والضلع الواصل بينها، (الشكل (٢–٢٨))

يكون أ ب = د هـ ، أ جـ = د و ، < أ = < د.

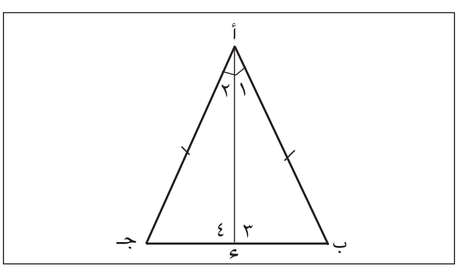
نظرية (٢-٧):

زاويتا القاعدة في المثلث متطابق الضلعين متطابقتان

البرهان :

اذا كان أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ، فالمطلوب اثبات أن < ب = < جـ

الآن ننصف الزاوية أ بالمنصف أ د، أنظر الشكل (٢–٢٩)



الشكل (٢–٢٩)

لاحظ أن المثلثين Δ أ ب د، Δ أ جـ د ينطبقان بضلعين وزاوية محصورة،

وينتج عن ذلك أن

$\angle$ ب = $\angle$ جـ ، ب د = د جـ ، $\angle$ ٤ = $\angle$ ٣

وهذا يثبت النظرية السابقة.

لاحظ عزيزي الدارس أنه من البرهان السابق ينتج أن:

$\angle$ ٣ = $\angle$ ٤ = ٩٠ ° (وذلك لأنهما متساويتين ومجموعهما يساوي ١٨٠°)

وهذا يُثبت النتيجة التالية

نتيجة: في المثلث متطابق الضلعين، يكون منصف زاوية الرأس عمودياً على القاعدة.

نظرية (٢-٨):

العمود النازل من رأس المثلث متطابق الضلعين على القاعدة يُنصف القاعدة وينصف زاوية الرأس.

نظرية (٢-٩):

زوايا المثلث متطابق الأضلاع متطابقة وقياس كل منها يساوي ٦٠°

ان برهان نظرية (٢–٨) مماثل لبرهان نظرية (٢–٧) ويُترك للقارىء، بينما نظرية (٢–٩) هي نتيجة للنظرية (٢–٧).

مثال (٢-٦): أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ

اذا كان $\angle$ أ = ٧٠°. أوجد $\angle$ ب

الحل:

حيث أن $\angle$ أ + $\angle$ ب + $\angle$ جـ = ١٨٠°

وأن $\angle$ أ = ٧٠°، فان

$\angle$ ب + $\angle$ جـ = ١١٠°

وبما أن $\angle$ ب = $\angle$ جـ (لأن المثلث متطابق الضلعين)

فان $\angle$ ب = $\angle$ جـ = ١١٠ ÷ ٢ = ٥٥°

تدريب (٢-١٠):

أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ

اذا كان > أ = ٧٤°، وكان أ د منصفاً للزاوية أ.

اذا علمت أن أ د = ٤ سم، ب د = ٣ سم، أوجد

(أ) > ب (ب) أ ب

تدريب (٢-١١):

أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ

اذا مُدّ ب جـ على استقامته باتجاه جـ الى د بحيث يكون أ جـ = جـ د

اذا علمت أن > أ جـ د = ١٣٠°، أوجد قياس

(أ) > أ (ب) > ب أ د

مسألة عملية: كيف تستطيع ايجاد عرض نهر ما ؟

من الممكن تحديد شجرة أو نقطة على الطرف المقابل لموقعك (على الطرف الآخر من النهر) مثل أ.

قف مقابلاً للنقطة أ وحدد النقطة ب بحيث يكون أ ب عمودياً على النهر،

حدد نقطة مثل جـ (على الجهة التي تقف فيها)

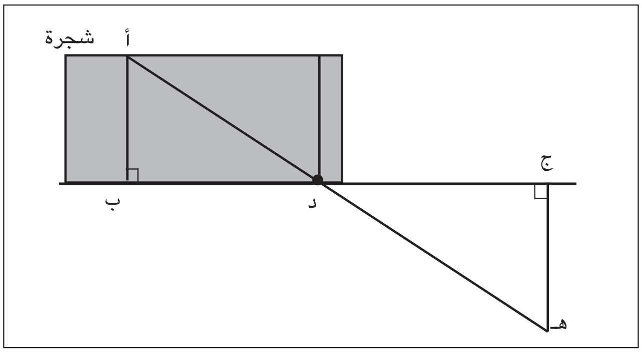
نصّف القطعة المستقيمة جـ ب في نقطة مثل د

ثم بالنظر حدد الشعاع أ د

قف في النقطة جـ وحدد جـ هـ ليكون عمودياً على جـ ب؛ حيث هـ هي تقاطع العمودي على ب جـ والشعاع أد

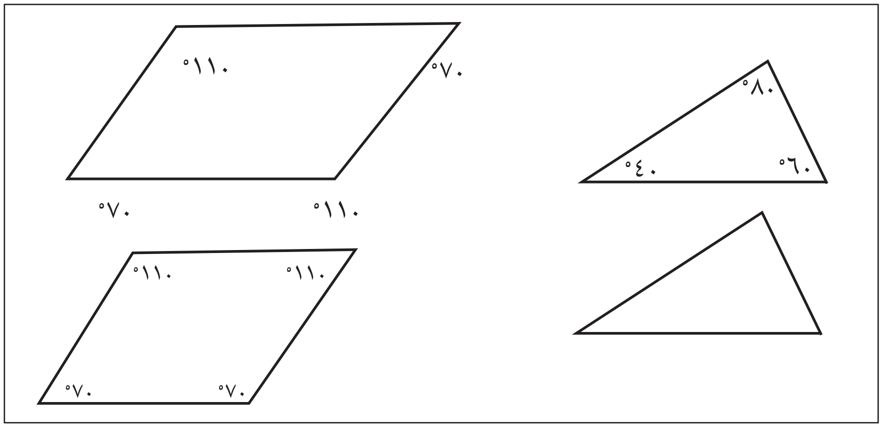
تستطيع ايجاد طول جـ هـ الآن بتطبيق المثلثين Δ أ ب جـ، Δ د جـ هـ، نجد أن أ ب = جـ هـ.

وعليه تستطيع الحصول على عرض النهر والذي هو أ ب، أنظر الشكل (٢-٣٠)



الشكل (٢-٣٠)

هناك مفهوم هندسي مهم أيضاً هو "مفهوم التشابه"، وببساطة نقول أن "شكلين هندسيين متشابهان اذا كان لهما نفس الشكل" وليس بالضرورة نفس الحجم، فمثلاً الأشكال التالية متشابهة:



الشكل (٢-٣١)

وعليه يكون مثلثان متشابهين اذا كانت زواياهما المتناظرة متطابقة، وفي هذه الحالة تكون اطوال الأضلاع المتقابلة متناسبة. وسنوضح ماذا نعني بهذا فيما يلي:

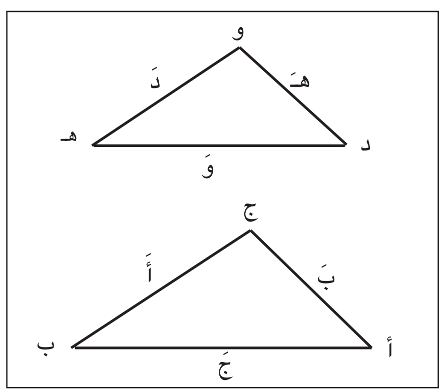
اذا كان Δ أ ب جـ، Δ د هـ و مثلثين بحيث يكون

< أ = < د ، < ب = < هـ ، < جـ = < و

فان المثلثين Δ أ ب جـ ، Δ د هـ و متشابهان

وكذلك اذا كان أ' يساوي طول الضلع المقابل للزاوية أ.

ب' يساوي طول الضلع المقابل للزاوية ب. وهكذا، أنظر الشكل (٢-٣٢)



الشكل (٢-٣٢)

فان $\frac{\text{ب جـ}}{\text{هـ و}} = \frac{\text{أ جـ}}{\text{د و}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{د هـ}}$ والتي تكافئ $\frac{\text{أ}'}{\text{د}'} = \frac{\text{ب}'}{\text{هـ}'} = \frac{\text{جـ}'}{\text{و}'}$

مثال (٢-٧):

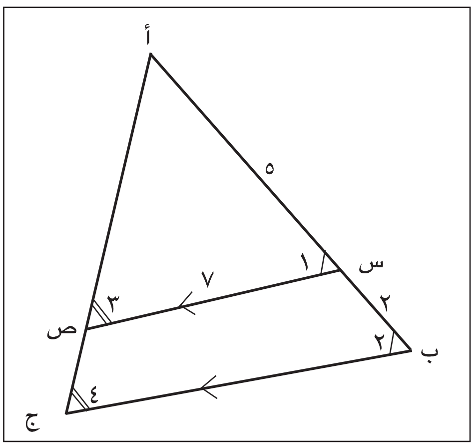
أ ب جـ مثلث، اذا كان س ص يوازي ب جـ

اذا علمت أن أ س = ٥ سم ، س ب = ٢ سم ، س ص = ٧ سم. أنظر الشكل (٢-٣٣)

أوجد طول ب جـ

الحل:

حيث أن < ٢ = < ١ (بالتناظر)



الشكل (٢-٣٣)

وأن < ٤ = < ٣ (بالتناظر)

فان المثلثين Δ أ س ص، Δ أ ب جـ متشابهان

وعليه فان

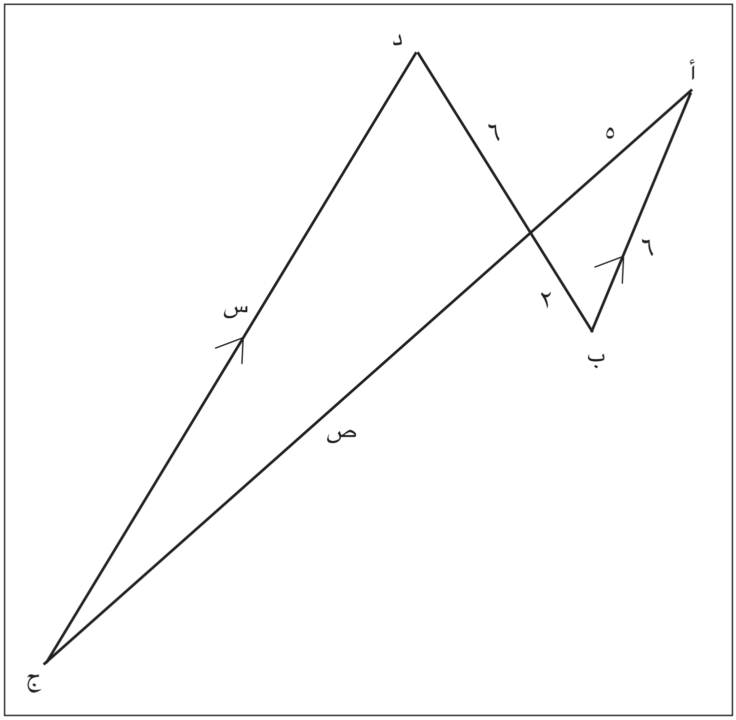
$$\frac{\text{س ص}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ س}}{\text{أ ب}} = \frac{\text{أ ص}}{\text{أ جـ}}$$

$$\longleftarrow \frac{٧}{\text{ب جـ}} = \frac{٥}{٧} \longleftarrow \text{ب جـ} = \frac{٧ \times ٧}{٥} = ٩,٨\text{سم}$$

تدريب (٢-١٢):

في الشكل (٢-٣٤)، أ ب يوازي جـ د

أوجد الطول س والطول ص.



الشكل (٢-٣٤)

دعنا الآن نستعرض بعض المضلعات ولنأخذ الأشكال الرباعية، وهي تلك الأشكال التي لها أربعة أضلاع (أو هي اتحاد أربع قطع مستقيمة)، ومن أهم الأشكال الرباعية:

(أ) متوازي الأضلاع: هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين.

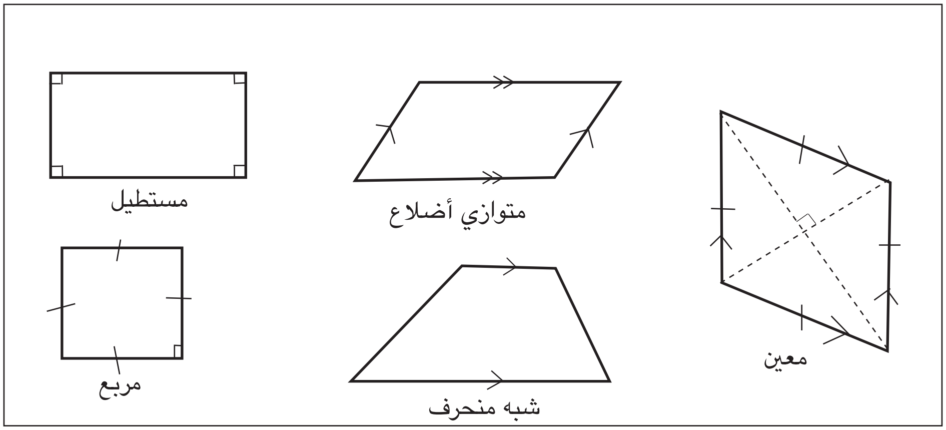
(ب) المربع: هو متوازي اضلاع، أضلاعه متطابقة وإحدى زواياه قائمة.

(جـ) المستطيل: هو متوازي أضلاع، إحدى زواياه قائمة.

(د) المعيّن: هو شكل متوازي اضلاع، قطراه متعامدان.

(هـ) شبه المنحرف: هو شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان.

أنظر الشكل (٢-٣٥).



الشكل (٢–٣٥)

من النتائج التي حصلنا عليها من دراسة المثلث وخصائصه وتطابق المثلثات يمكن الحصول على النتائج التالية:

(١) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي تساوي ٣٦٠°.

(خذ قطراً للشكل الرباعي فهذا القطر يقسمه الى مثلثين)

(٢) أقطار متوازي الأضلاع يُنصف كل منهما الآخر، (تطبيق مثلثات)

(٣) كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقان، (تطبيق مثلثات)

تدريب (٢-١٣):

أثبت أن قطرا متوازي الأضلاع يُنصف كل منهما الآخر.

لاحظ عزيزي الدارس أن:

(أ) مجموع قياسات زوايا المثلث تساوي ١٨٠°.

(ب) مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي تساوي ٢ × ١٨٠°= ٣٦٠°.

(جـ) مجموع قياسات زوايا الشكل الخماسي تساوي ٣ × ١٨٠°= ٥٤٠°.

سؤال:

(أ) ما مجموع قياسات زوايا الشكل السداسي ؟

(ب) ما مجموع قياسات زوايا الشكل السباعي ؟

(جـ) ما مجموع قياسات زوايا الشكل الذي له ن ضلعاً ؟

- انتقل الى تقويم ذاتي (٢–٣).

مفاهيم أولية في الهندسة الفضائية

تناولنا في البنود الثلاثة الأولى من هذه الوحدة المستقيمات والمثلثات والأشكال الرباعية الواقعة في المستوى، اذ أن الأشكال الهندسية السابقة لا سُمك لها. ولكن الهندسة الفضائية تتعامل مع أشكال هندسية في الفضاء ومع المجسّمات والتي هي أجسام تشغل حيزاً مثل الطاولة والكرسي والكتاب والمصباح وقطعة من الصخر.

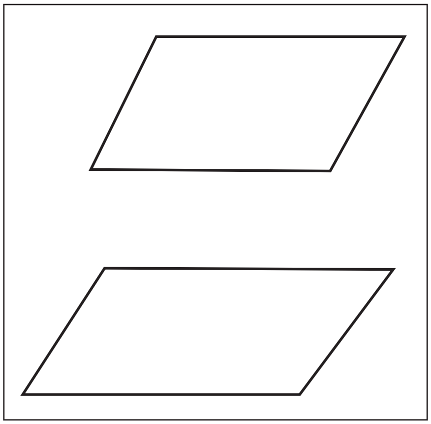
سنتناول في هذا البند بعض المفاهيم الأساسية في الهندسة الفضائية بينما سنتناول في البند التالي بعض المجسّمات، ونعطي طريقة حساب أحجام هذه المجسّمات ومساحاتها الجانبية.

لقد ذكرنا في البند (٢-١) أن المستوى من المفردات غير المعرّفة التي بدأ منها اقليدس في تطوير الهندسة المستوية، ولكننا وصفنا المستوى بأنه سطح منبسط مثل سقف الغرفة أو اللوح أو زجاج النافذة، دعنا نبدأ بالحقائق التالية:

(١) اذا كان لدينا مستويين س، ص فهناك وضعان للمستويين وهما:

(أ) يكون المستويان متوازيان، أنظر الشكل (٢-٣٦)

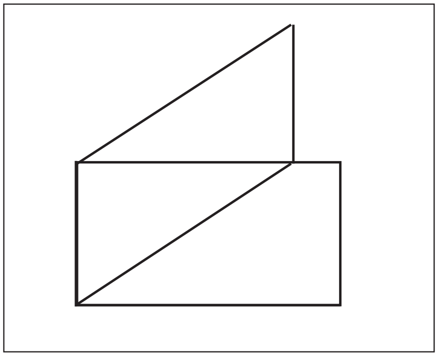
يتوازى مستويان اذا لم يتقاطعا مهما امتدا، أي لا يوجد نقطة مشتركة بين المستويين.



الشكل (٢-٣٦)

(ب) المستويان متقاطعان، أنظر الشكل (٢-٣٧)

يتقاطع مستويان، ان لم يكونا متوازيين، في خط مستقيم.



الشكل (٢–٣٧)

(٢) اذا كان م١، م٢ مستقيمين في الفضاء فلهذين المستقيمين ثلاثة أوضاع هي:

(أ) المستقيمان يتقاطعان

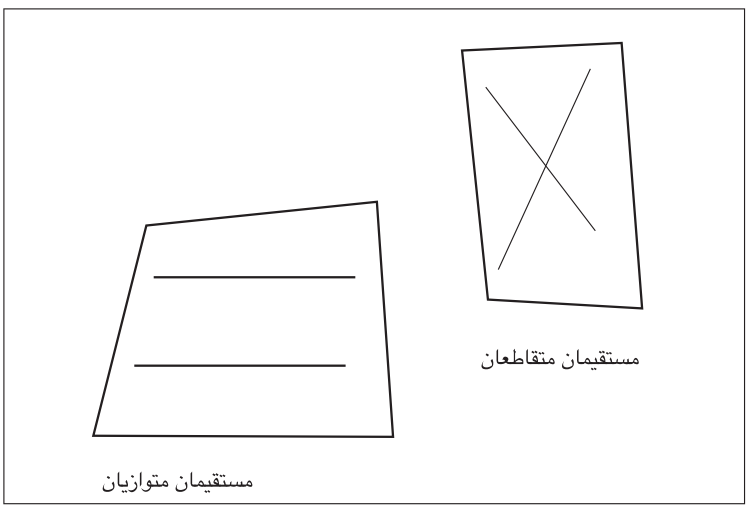
وفي هذه الحالة يتقاطع المستقيمان في نقطة واحدة ويكون المستقيمان في مستوى واحد، أي أنه يوجد مستوى وحيد يحتوي على المستقيمين.

(ب) المستقيمان متوازيان

لا يوجد نقاط مشتركة بين المستقيمين ولكنهما يقعا في مستوى واحد، بمعنى أنه يوجد مستوى وحيد يحتوي على المستقيمين.

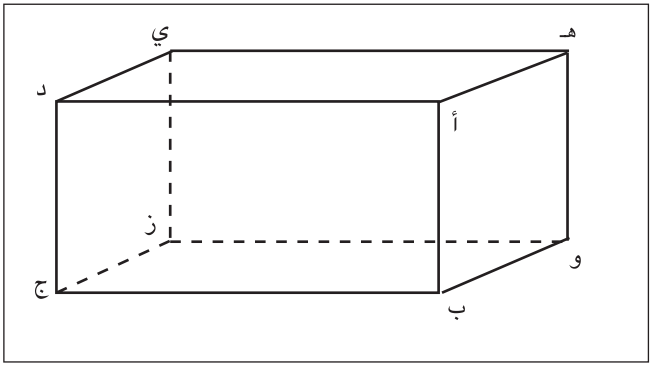
(جـ) المستقيمان متخالفان

وفي هذه الحالة لا يوجد مستوى يحتوي على المستقيمين، أنظر الشكل (٢–٣٨)



الشكل (٢–٣٨)

ولبيان ذلك، اذا أخذنا مكعب كذلك المبين في الشكل (٢–٣٩)



الشكل (٢-٣٩)

فان المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{ب ج}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ متخالفان، وكذلك $\overleftrightarrow{\text{و ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{هـ ي}}$

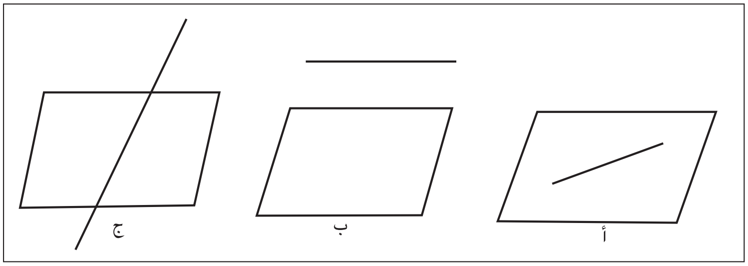
(٣) اذا كان س مستوى معين، وكان م١ مستقيم في الفضاء، فهناك حالات هي:

(أ) المستقيم يقع في المستوى (وفي هذه الحالة تكون جميع نقاط المستقيم تقع في المستوى)

(ب) المستقيم يوازي المستوى

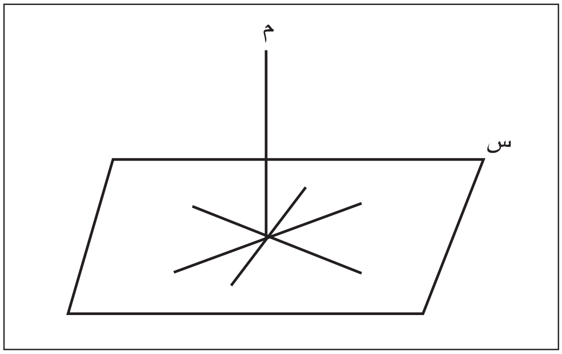
(جـ) المستقيم يقطع المستوى

أنظر الشكل (٢-٤٠)



الشكل (٢-٤٠)

لاحظ عزيزي الدارس أن المستقيم $م_1$ يكون عمودياً على المستوى س، اذا كان متعامداً مع كل مستقيم في المستوى يمر بنقطة التقاطع، أنظر الشكل (٢–٤١).



الشكل (٢–٤١)

تدريب (٢-١٤):

(١) اذا كان م مستقيم في الفضاء، ما عدد المستويات التي تحتوي على المستقيم م ؟

(٢) اذا كان $م_1$ مستقيم في الفضاء وكانت أ نقطة لا تقع على المستقيم، فكم مستوى يحتوي على كلٍ من المستقيم $م_1$ والنقطة أ ؟

(٣) اذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط في الفضاء، فكم مستوى يحتوي على النقاط الثلاثة اذا كانت:

(أ) النقاط الثلاث تقع على خط مستقيم ؟

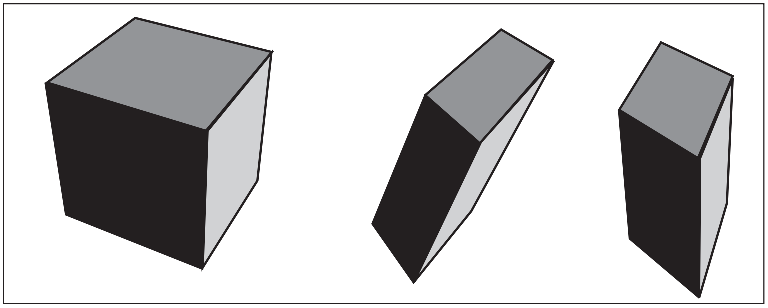
(ب) النقاط الثلاث لا تقع على خط مستقيم ؟

- انتقل الى تقويم ذاتي (٢–٤).

بعض المجسّمات وخصائصها

من أهم المجسّمات في الفضاء:

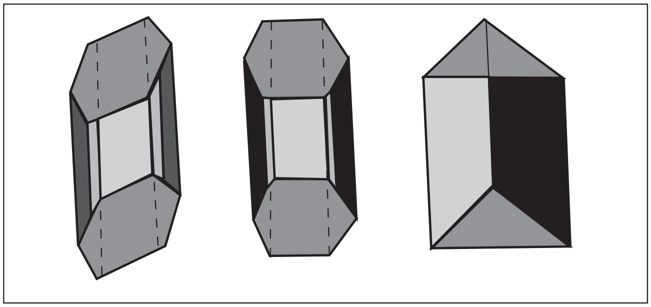
(١) متوازي السطوح: وهو مجسّم محاط بثلاثة أزواج من السطوح المتوازية، يبين الشكل (٢–٤٢) بعض متوازيات السطوح.



الشكل (٢-٤٢)

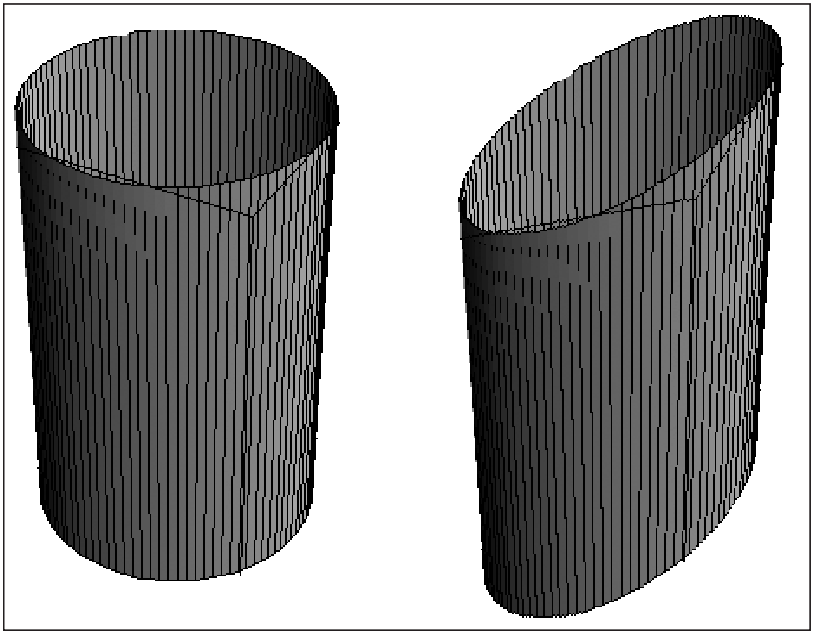
فالمكعب هو متوازي سطوح جميع سطوحه مربعات متطابقة
ومتوازي المستطيلات هو متوازي سطوح كل سطوحه مستطيلات.
(٢) المنشور: وهو مجسّم محاط بأوجه مستوية يُسمى اثنان منهما القاعدتين، وهما شكلان متطابقان في مستويين متوازيين، أما بقية الجوانب فهي متوازيات أضلاع (قد تكون مستطيلات أو مربعات).

اذا كانت قاعدة المنشور مثلث فيُسمى منشور ثلاثي، واذا كانت القاعدة شكل رباعي فيُسمى منشور رباعي، وقد يكون المنشور قائماً أو مائلاً. يعطي الشكل (٢-٤٣) بعض المنشورات.



الشكل (٢-٤٣)

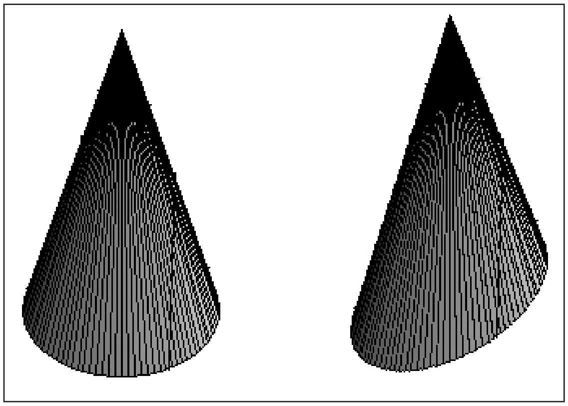
لاحظ عزيزي الدارس بأنه يمكن اعتبار متوازي المستطيلات منشوراً.
(٣) الاسطوانة: تُعرّف الاسطوانة بأنها مجسّم لها قاعدتين دائريتّين متطابقتين (وتقعان في مستويين متوازيين)، ويُسمى المستقيم الواصل بين مركزي الدائرتين محور الاسطوانة، وكما في المنشور فقد تكون الاسطوانة قائمة وقد تكون مائلة. أنظر الشكل (٢-٤٤).



الشكل (٢-٤٤)

من الممكن تصور أن الاسطوانة هي مجسّم ناتج عن دوران مستطيل حول أحد أضلاعه.

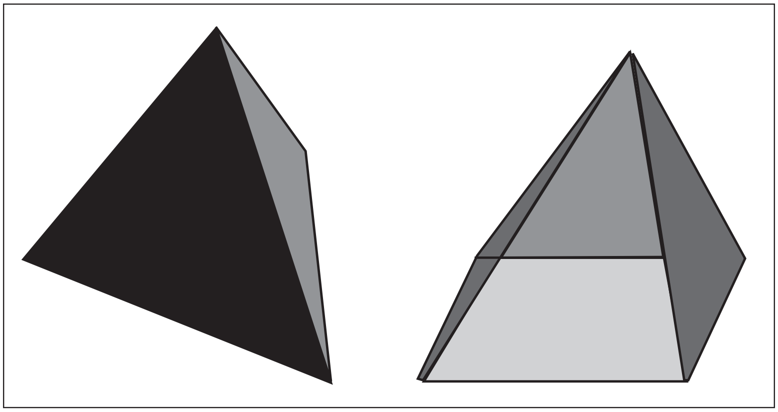
(٤) المخروط: هو مجسّم له قاعدة دائرية واحدة، وقد يكون المخروط قائماً أو مائلاً. أنظر الشكل (٢-٤٥).



الشكل (٢-٤٥)

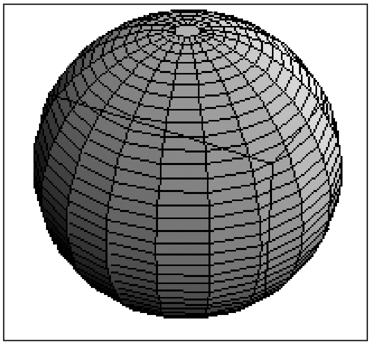
(٥) الهرم: هو مجسّم كالمخروط ولكن قاعدته مضلّع، ويعطى الهرم اسماً بناءً على شكل قاعدته.

"فالهرم الثلاثي" هو هرم قاعدته مثلث، "والهرم الرباعي" هو هرم قاعدته شكل رباعي. وقد يكون الهرم قائماً أو مائلاً. أنظر الشكل (٢-٤٦).



الشكل (٢-٤٦)

(٦) الكرة: وهي مجسّم يتولد من دوران نصف دائرة حول قطرها. أنظر الشكل (٢-٤٧).



الشكل (٢-٤٧)

واليك عزيزي الدارس بعض القوانين المستخدمة في حساب حجوم بعض المجسّمات ومساحاتها الجانبية.

(١) حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = مجموع مساحات الأوجه الجانبية

(٢) حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية للمنشور = محيط القاعدة × الارتفاع

(٣) حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

= نق^{٢} ط ع

والمساحة الجانبية للاسطوانة = محيط القاعدة × الارتفاع

= ٢ نق ط ع

حيث نق هو نصف قطر القاعدة

ع ارتفاع الاسطوانة (وهو البعد العمودي بين قاعدتي الاسطوانة)

ط النسبة التقريبية وتساوي تقريبا ٣,١٤ وتكتب π بالرموز اللاتينية.

(٤) حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية للمخروط القائم = $\frac{١}{٢}$ (محيط القاعدة) × الراسم

= نق ط × الراسم

حيث نق هي نصف قطر القاعدة والراسم هو طول القطعة المستقيمة الواصلة بين رأس المخروط وأية نقطة على قاعدته

(٥) حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات أوجه الهرم

(٦) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^{٣} ط

مساحة سطح الكرة = ٤ نق^{٢} ط

ولايجاد المساحة الكلية لكل من المنشور والاسطوانة والمخروط والهرم تُضاف الى المساحة الجانبية مساحة القاعدة في حالة المخروط والهرم او القاعدتين في حالة المنشور والاسطوانة.

مثال (٢-٨):

منشور ثلاثي قاعدته مثلث قائم الزاوية طول وتره يساوي ١٠ سم، وطول أحد اضلاعه يساوي ٦ سم، اذا كان ارتفاع المنشور يساوي ١٣ سم. أوجد

(أ) حجم المنشور (ب) مساحته الجانبية

الحل: حيث أن القاعدة هي مثلث قائم الزاوية وتره ١٠ سم وأحد أضلاعه ٦ سم

طول الضلع الآخر = $\sqrt{(١٠)^{٢} - (٦)^{٢}}$ = ٨ سم (استخدام نظرية فيثاغورس)

وعليه فان مساحة القاعدة = مساحة المثلث قائم الزاوية = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب ضلعي القائمة

= $\frac{١}{٢}$ (٦) (٨) = ٢٤سم^{٢}

وعليه فان حجم المنشور = مساحة القاعدة × الارتفاع

= ٢٤ × ١٣ = ٣١٢ سم^{٣}

(ب) المساحة الجانبية = مساحة أوجهه الثلاثة = (٦ × ١٣) + (٨ × ١٣) + (١٠ × ١٣)

= ٣١٢ سم^{٢}

تدريب (٢-١٥):

اذا كانت قاعدة مثلث أطوال أضلاعه ١٠ سم، ٧ سم، ٥ سم.

أوجد حجم المنشور الثلاثي الذي قاعدة المثلث أعلاه وارتفاعه ٩ سم، وكذلك أوجد مساحته الجانبية.

ملاحظة: مساحة المثلث الذي أطوال أضلاعه أ'، ب'، جـ' يساوي

$$\sqrt{ح(ح - أ')(ح - ب')(ح - جـ')}$$

حيث ح = $\frac{أ' + ب' + جـ'}{٢}$ نصف محيط المثلث.

مثال (٢-٩):

مخروط قائم نصف قطر قاعدته يساوي ٦ سم، وارتفاعه يساوي ٨ سم. أوجد

(أ) حجم المخروط (ب) مساحته الجانبية

الحل:

(أ) الحجم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ (٦)^{٢} ط × ٨

= ٩٦ ط = ٣٠٢,٥ سم^{٣}

(ب) حيث أن

الراسم = $\sqrt{(٦)^٢ + (٨)^٢}$ = ١٠سم

فالمساحة الجانبية = (نق ط) (الراسم) = (٦ ط) (١٠)

= ٦٠ ط سم^٢

تدريب (٢-١٦):

مخروط قائم نصف قطر قاعدته يساوي ١٦ سم. اذا كان طول الراسم يساوي ٢٠ سم، فاوجد

(أ) حجم المخروط (ب) مساحته الجانبية

مثال (٢-١٠):

كرة نصف قطرها ٩ سم، أوجد حجمها وكذلك مساحة سطحها

الحل:

(أ) حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ نق^٣ ط

= $\frac{٤}{٣}$ (٩)^٣ ط

= ٩٧٢ ط سم^٣

مساحة السطح = ٤ ط نق^٢

= ٣٢٤ ط سم^٢

تدريب (٢-١٧):

كرة مساحة سطحها ١٠٠ سم^٢، أوجد حجمها.

● انتقل الى تقويم ذاتي (٢-٥).

خاتمة

تناولنا في هذه الوحدة بعض المفاهيم الأساسية المستوية، حيث ذكرنا أن الهندسة المستوية تبدأ من مفردات غير معّرفة وهي النقطة والخط المستوى، ومن ثم وضع مسلّمات وهي عبارات نفترض صحتها وبعدها تستخدم هذه المفردات وتلك المسلّمات في اثبات النظرية الهندسية.

بعدها تناولنا المفاهيم المتعلقة بالمستقيمات والزوايا، وقمنا بتعريف بعض أنواع من الزوايا كالزوايا المتتامة والزوايا المتكاملة والمتحالفة والمتناظرة.
وعالجنا موضوع توازي المستقيمات وعلاقة التوازي يالزوايا المتناظرة والمتحالفة، ثم تناولنا بعض المضلعات الهندسية الفضائية والتي تتعامل مع المستقيمات في الفضاء، وتعالج كذلك المجسّمات وخواصها.

لقد عالجنا بعض أنواع المجسّمات كمتوازي المستطيلات والهرم والكرة، وبينما كيفية حساب حجوم هذه المجسّمات وكذلك ايجاد مساحاتها الجانبية.

أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (٢-١):

(١) أثبت أن هناك على الأكثر نقطة واحدة تقع على مستقيمين مختلفين.

(٢) اذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط في المستوى لا تقع على استقامة واحدة

(أ) كم مستقيماً يمكن أن يمر بالنقطتين أ، ب ؟

(ب) كم مستقيماً يمكن رسمه باستخدام النقاط الثلاث أ، ب، جـ.

(جـ) كم شعاعاً يمكن رسمه باستخدام النقاط الثلاث ؟

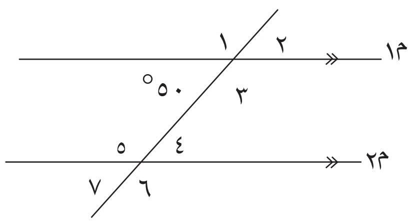
تقويم ذاتي (٢-٢):

(١) > أ = ٢٨ʹ ٣٧° ، > ب = ٣٢ʹ ٥٢° ، > جـ = ٤٥ʹ ٦٤°. أوجد

(أ) > أ + > ب (ب) > أ + > ب + > جـ

(٢) في الشكل (٢-١)، م١، م٢ مستقيمان متوازيان و م قاطع لهما. أوجد قياس الزوايا

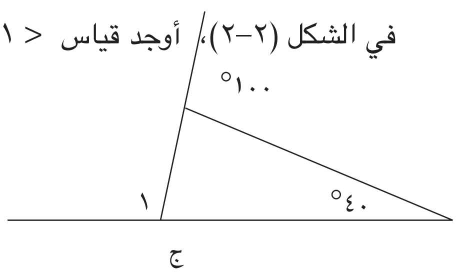
> ١، > ٢ ، > ٣ ، > ٤ ، > ٥ ، > ٦ ، > ٧.



الشكل (٢-١)

تقويم ذاتي (٢-٣):

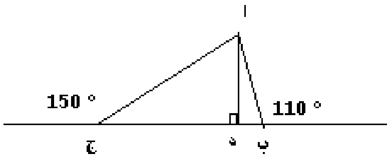
(١) في الشكل (٢-٢)، أوجد قياس > ١.



الشكل (٢-٢)

(٢) المثلث أ ب جـ فيه < أ = ٦٠°، < ب = ٣٠°، وكان أ جـ = ١٢ سم، أ ب = ٢٠ سم.
أوجد طول ب جـ.

(٣) في الشكل (٢-٣)، أوجد :
(أ) < ب أ جـ (ب) < ب أ د



الشكل (٢-٣)

(٤) اذا كان أ ب جـ مثلث متطابق الضلعين فيه أ ب = أ جـ
اذا كان أ د عمودياً على القاعدة ب جـ في د
اذا علمت أن أ ب = ٥ سم، أ د = ٤ سم، أوجد د ب

(٥) اذا كان أ ب جـ مثلث فيه < أ = ٨٠°. اذا مُدّ ب جـ على استقامته باتجاه جـ الى د.
اذا كانت < أ = ٨٠°، < أ جـ د = ١٣٠°،
أثبت أن المثلث أ ب جـ متطابق الضلعين.

(٦) أ ب جـ ، د هـ و مثلثان فيهما < أ = < د ، < ب = < هـ ، < جـ = < و.
هل ينطبق المثلثان ؟ علل.

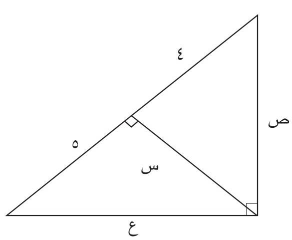
(٧) اذا كان أ ب جـ مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه يساوي ١٠ سم. أوجد طول العمود النازل من أحد الرؤوس على الضلع المقابل له (يُسمى ارتفاع المثلث).

(٨) أثبت أن كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متطابقين.

(٩) أوجد مجموع قياسات زوايا مضلع له ١٠ أضلاع.

(١٠) اذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في جـ، واذا كان جـ د عمودياً على أ ب، فأثبت أن
(جـ د)^{٢} = (أ د). (د ب).

(١١) في الشكل (٢-٤)، أوجد س، ص، ع



الشكل (٢-٤)

تقويم ذاتي (٢-٤):

(١) بيّن فيما اذا كانت العبارات التالية صائبة أم خاطئة:

(أ) اذا كان $م_١$، $م_٢$ مستقيمين في الفضاء فاما أن يتقاطعا واما أن يكونا متوازيين.

(ب) اذا كانت أ، ب، جـ ثلاث نقاط في الفضاء، فهناك مستوى وحيد يحتوي على هذه النقاط.

(جـ) اذا كان $م_١$، $م_٢$ مستقيمان متقاطعين، وكان م مستقيماً عمودياً على المستوى الذي يحتوي على $م_١$، $م_٢$ ويمر في نقطة تقاطعهما فان م عمودي على $م_١$ وعلى $م_٢$.

(٢) أعطِ أمثلة على كل مما يلي:

(أ) مستويين متقاطعين (ب) مستقيمين متخالفين

(جـ) مستقيم يوازي مستوى

(٣) أثبت أنه اذا وازى مستقيم مستوىً معلوماً فان كل مستوىً مار بالمستقيم وقاطع للمستوى المعلوم يقطعه في مستقيم يوازي المستقيم المعلوم.

تقويم ذاتي (٢-٥):

(١) اذا دار المستطيل أ ب جـ د الذي فيه أ ب = ١٠ سم، ب جـ = ٦ سم حول المستقيم أ ب، أوجد المساحة الجانبية للمجسّم الناتج.

(٢) مخروط قائم قاعدته الى أسفل في داخل كرة نصف قطرها ١٥ سم. اذا كان رأس المخروط يقع على الكرة، اذا علمت أن نصف قطر قاعدة المخروط يساوي ١٢ سم. أوجد حجم المخروط.

(٣) مخروط قائم نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه يساوي ٨ سم، اذا قطع المخروط بمستوى يوازي قاعدته ويبعد عنها ٦ سم. أوجد حجم المجسّمين الناتجين.

المصادر والمراجع

(١) عوض، عدنان، (٢٠٠٠)، "**مبادىء الرياضيات لتأهيل المعلمين**"– الجزء الثالث، دار الكتاب الجديدة المتحدة، بيروت، لبنان.

(٢) عزه، حسن، النتشه، محمد، (١٩٩٧)، "**الهندسة الاقليدية**"، منشورات جامعة القدس المفتوحة.

(2) Moser, J.M., (1971), **"Modern Elementary Geometry"**, Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A.

الوحـــدة الثالثـة

الوحـــدة الثالثـة

القيـاس

اعـداد :

أ. د. مفيـد عـزام

محتويات الوحدة الدراسية

الأهـداف التعليمية للوحدة الدراسية

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يكون قادراً على أن:

(١) يتعرف بعض المقاييس غير المعيارية.

(٢) يتعرف مقاييس الطول والعلاقة بينها والتحويل بين مقياس الى آخر.

(٣) يتعرف مفهوم مقياس الرسم، واستخدام الخرائط لايجاد المسافة بين مدن مختلفة.

(٤) يتعرف مقاييس المساحة وتحويلاتها.

(٥) يتعرف مقاييس الحجم وتحويلاتها.

(٦) يتعرف مقاييس الحرارة وتحويلاتها.

(٧) يتعرف مقاييس الكتلة وتحويلاتها.

مقدمــة

تجري ومنذ القِدم تعاملات بين الناس كالبيع والشراء والاستعارة والدين. لقد كانت هناك حاجة الى وضع مقاييس لتسهيل المعاملات بين الناس، فمثلاً هناك حاجة لوضع مقياس لمعرفة كمية السلعة المراد شراؤها أو بيعها ومقاييس للمسافة بين المدن أو القرى.

وكانت المقاييس في بداية نشأتها ذات طابع محلي، اذ كان لكل تجمّع سكاني مقاييسه الخاصة به، ومع تطور وسائل الاتصال مع المجتمعات كان هناك حاجة لمقاييس عامة يمكن استخدامها في دولة معينة أو في عدة دول، وأخيراً أستحدثت عدّة أنواع من المقاييس أشهرها المقاييس الانجليزية والمقاييس الفرنسية.

بينما أستخدمت الياردة والقدم والباوند كمقاييس للطول والكتلة في النظام الانجليزي، أُستخدِم المتر والسنتيمتر والكيلوغرام في النظام الفرنسي، وسنتناول في هذه الوحدة بعض مقاييس الطول والمساحة والحجم والكتلة ودرجة الحرارة والتحويلات بينها.

لقد جاءت هذه الوحدة في سبعة بنود، تناولنا في البند الأول منها بعض المقاييس غير المعيارية وهذا يحقق الهدف الأول من هذه الوحدة، بينما تناولت البنود الأخرى بعض المقاييس المعيارية للطول والمساحة والحجم ودرجة الحرارة والكتلة، وتحويلات هذه المقاييس من نظام الى آخر وهذا يحقق الأهداف الأخرى لهذه الوحدة.

مقاييس غير معيارية

لقد أستخدمت وحدات للقياس في الحضارات القديمة وذلك لتسهيل التعاملات اليومية بين الناس، وفي البداية كانت هناك وحدات خاصة لكل تجمع سكاني، ومن ثم أستحدثت مقاييس معيارية أصبحت تُستخدم ضمن الدولة الواحدة، وبعدها أستخدمت هذه المقاييس على نطاق أوسع لتشمل دول متعددة.

ونظراً لتطور وسائل الاتصال بين المجتمعات المختلفة أصبحت هناك بعض المقاييس المعيارية تحمل الصبغة العالمية أو الدولية، اذ أصبحت هذه المقاييس معروفة في كافة أنحاء المعمورة. وبينما كانت هناك حاجة في الحضارات القديمة الى مقاييس للمسافات والحجوم والكتل، أصبح هناك حاجة الى مقاييس أخرى وذلك مع التطور الحضاري، فأستحدثت مقاييس لدرجة الحرارة، ومقاييس للتيار الكهربائي ومقاييس للاشعاع، ومن المقاييس غير المعيارية للمسافات والأطوال والتي أستخدمت في الحضارات القديمة، وما زال البعض منها يُستخدم على نطاق ضيق في عصرنا هذا الفتر والشبر والذراع، والقدَم البشرية والخطوة والفرسخ، وغيرها .
وللمساحات أستخدمت مقاييس مثل : "الدونم" ، "والهكتار" ، "والقيراط".
وللكميات أستخدمت مقاييس مثل الصاع ، والمُد.

وقد أستخدمت في العصور السابقة قياسات مثل "المسافة بين مدينة معينة ومدينة أخرى"، تقدّر "بمسيرة يومين" أو مسيرة ثلاثة أيام.

(١) المقاييس الانجليزية

في هذا النوع من المقاييس أستخدمت المقاييس التالية:
الياردة والقدَم والانش والميل كمقاييس للأطوال والمسافات، والياردات المربعة والأقدام المربعة كمقاييس للمساحات، والياردات المكعبة أو الأقدام المكعبة كمقاييس للحجوم، والباوند كمقياس للكتلة، والدرجات الفهرنهايتية لقياس درجات الحرارة.

(٢) المقاييس الفرنسية

لقد أستحدثت في فرنسا في عام ١٨٩٠ ميلادية وحدات أخرى للقياس نذكر منها:
المتر ، والسنتيمتر ، والكيلومتر وهي وحدات تُستخدم لقياس الأطوال والمسافات
والكيلوغرام ، والغرام وتُستخدم لقياس الكتل والأوزان.
والدرجات المئوية وتُستخدم لقياس درجات الحرارة.

وتُسمى المقاييس الفرنسية أحياناً "المقاييس المترية".
وهناك علاقات بين المقاييس الانجليزية والمقاييس الفرنسية سنذكرها ونتعامل معها في البنود اللاحقة.

مقاييس الطـول

سبق وذكرنا في البند السابق أن هناك نوعين من المقاييس المعيارية تُستخدم في قياس الأطوال والمسافات وهي المقاييس الانجليزية والمقاييس الفرنسية، ففي النظام الانجليزي تُستخدم المقاييس التالية:

الياردة = ٣ قدم

القدَم = ١٢ انش

الميل = ٥٢٨٠ قدَم

= ١٧٦٠ ياردة

أما في النظام الفرنسي فتُستخدم المقاييس التالية:

الكيلومتر ، المتر ، الديسيمتر ، السنتيمتر ، المليمتر.

واليك عزيزي الدارس العلاقة بين هذه المقاييس

المتر = ١٠ ديسيمتر

الديسيمتر = ١٠ سنتيمتر

السنتيمتر = ١٠ ملليمتر

الكيلومتر = ١٠٠٠ متر

ويُستخدم الرمز "م" للدلالة على المتر

والرمز "دسم" للدلالة على الديسيمتر

والرمز "سم" للدلالة على السنتيمتر

والرمز "ملم" أو "مم" للدلالة على المليمتر

والرمز "كم" للدلالة على الكيلومتر.

أما العلاقة التي تربط بين الوحدات الانجليزية والوحدات الفرنسية فهي:

الانش (بوصة) = ٢,٥٤ سم

القدَم = ٣٠,٥ سم

الياردة = ٩٢ سم

مثال (٣-١): حوّل ٨ أقدام الى انشات

الحل: ٨ قدَم = ٨ (١٢ انش)

= ٩٦ انش

مثال (٣-٢): حوّل ٣٠٠ بوصة الى أقدام

الحل: ٣٠٠ بوصة = ٣٠٠ ÷ ١٢

= ٢٥ قدَم

مثال (٣-٣): حوّل ١٧,٣ متراً الى

(أ) ديسيمترات (ب) سنتيمترات

الحل:

(أ) ١٧,٣م = ١٧,٣ (١٠ دسم)

= ١٧٣ دسم

(ب) ١٧,٣م = ١٧,٣ (١٠٠ سم)

= ١٧٣٠ سم

مثال (٣-٤): حوّل الى سنتيمترات

(أ) ٣ ياردة و ٣ انشات (ب) ٣ ياردة و ٢ قدَم و ٥ انشات

الحل:

(أ) حيث أن ٣ ياردة = ٣(٩٢ سم) = ٢٧٦ سم

٣ انش = ٣(٢,٥٤ سم) = ٧,٦٢ سم

فان

٣ ياردة و ٣ انشات = ٢٧٦ سم + ٧,٦٢ سم

= ٢٨٣,٦٢ سم

(ب) حيث أن٣ ياردة = ٣(٩٢ سم) = ٢٧٦ سم

٢ قدَم = ٢(٣٠,٥ سم) = ٦١ سم

٥ انشات = ٥(٢,٥٤ سم) = ١٢,٧ سم

وعليه فان

٣ ياردات و ٢ قدَم و ٥ انشات = ٢٧٦ سم + ٦١ سم + ١٢,٧ سم

= ٣٤٩,٧ سم

تدريب (٣-١):

حوّل الى انشات : (أ) ٣ ياردات (ب) ٤ ياردات و ٥ قدَم

(جـ) ٢ ميل و ٣٠ ياردة و ١٠ أقدام

تدريب (٢-٣):

حوّل الى ملليمترات

(أ) ٣ م و ٢ دسم و ٥ سم (ب) ٧ دسم و ١٠ سم

(جـ) ٣ قدَم و ٥ انشات (د) ٣ ياردة و ٢ قدَم و انش

تدريب (٣-٣):

حوّل الى كيلومترات

(أ) ١٥ ميل (ب)٣٧٢٠ ياردة

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-١).

مقاييس الرسم

تُستخدم خرائط الدول وخرائط المدن لأغراض التنظيم والدراسات السكانية والديموغرافية، وكذلك تُستخدم لأغراض السياحة. وبالطبع لا يمكن رسم الخرائط بالحجم الطبيعي ولكنها تُرسم على مقياس أقل، فمثلاً قد يمثّل كل كيلومتر على أرض الواقع بواحد سنتيمتر على الخارطة، وفي هذا الحالة يُقال أن مقياس الرسم هو ١ سم لكل ١ كم، وقد يُكتب مقياس الرسم هذا بطرق مختلفة منها:

١ : ١٠٠٠٠٠ أو $\frac{١}{١٠٠٠٠٠}$

وبمعرفة مقياس الرسم لخارطة ما، وباستخدام المسطرة لقياس المسافة بين نقطتين على الخارطة نستطيع ايجاد المسافة الحقيقية ما بين النقطتين.

فمثلاً اذا كانت المسافة بين مدينتين أ ، ب على الخارطة تساوي ١٥ سم، وكان مقياس الرسم للخارطة هو ١ سم لكل ١ كم، (والذي يُكتب كما سبق وأسلفنا ١ : ١٠٠٠٠٠)، فان المسافة الفعلية بين المدينتين هي ١٥ كم.

مثال (٣-٥):

اذا كانت المسافة على الخارطة بين المدينتين أ ، ب تساوي ٢٧ سم، أوجد المسافة بين المدينتين اذا كان مقياس الرسم

(أ) ١ : ١٠٠٠٠ (ب) ١ : ١٠٠٠٠٠٠

الحل:

(أ) بامكاننا ايجاد المسافة باستخدام النسبة والقياس، وذلك كما يلي:

اذا كانت المسافة المطلوبة تساوي س كم، فلايجاد قيمة س نتبع أسلوب النسبة والتناسب التالي:

كل ١ سم على الخارطة يقابل ١ كم على الأرض

٢٧ على الخارطة يقابل س كم

ومنها فان س= $\frac{٢٧ \times ١}{١}$ = ٢٧ كم

(ب) باستخدام الطريقة المبينة في (أ) أعلاه فان

كل ١ سم على الخارطة يقابل ١٠ كم على الأرض

٢٧ سم على الخارطة تقابل س كم

ومنها س = ٢٧٠ كم ، هي المسافة بين المدينتين أ ، ب.

مثال (٣-٦):

اذا كان مقياس الرسم لخارطة ما هو

١ انش يقابل ١ ميل"

اذا علمت أن المسافة الفعلية بين مدينتين أ ، ب تساوي ٣٠ ميلاً، فما هي المسافة بينهما على الخارطة ؟

الحل:

حيث أن مقياس الرسم هو " ١ انش لكل ١ ميل" ، فاذا فرضنا أن المسافة بين المدينتين على الخارطة تساوي س انش،

فان س = ٣٠ انشاً.

نشاط

استخدم أطلساً لايجاد المسافة بين:

(أ) مكة المكرمة والمدينة المنورة (ب) مدينة الكويت وجدّة

تدريب (٣-٤):

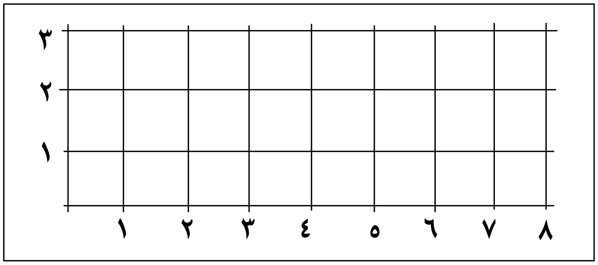
اذا كان مقياس الرسم لخارطة ما هو ١ : ١٠٠٠٠٠٠ ، وكانت المسافة على الخارطة بين مدينتين مثل أ ، ب تساوي ٧,٣ سم. أوجد المسافة الفعلية بين المدينتين.

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-٢).

مقاييس المساحة

لتقديم مفهوم المساحة بشكل مبسط لنأخذ المثال التالي:

اذا كان لدينا مستطيل أبعاده ٨ سم ، ٣ سم، واردنا قياس مساحة المنطقة المحصورة داخل هذا المستطيل فاننا نقوم بتقسيم المنطقة المحصورة داخل المستطيل الى مربعات متساوية الأبعاد طول ضلع كلٍ منها يساوي ١ سنتيمتر، أنظر الشكل (٣-١):



الشكل (٣-١)

فنلاحظ أن مساحة المنطقة المحصورة داخل المستطيل تساوي ٢٤ مربعاً.

وحيث أن مساحة كل مربع تساوي ١ سم × ١ سم، والتي سنرمز لها بالرمز "سم^{٢}"، فان مساحة المنطقة المطلوبة = ٢٤ سم^{٢}.

أي أننا نفكر بالوحدة "سم^{٢}" كأنها مساحة مربع طول ضلعه ١ سم.

وبالمثل فان الرمز " م^{٢}" يمثل مساحة مربع طول ضلعه ١ م

والرمز "قدم^{٢}" يمثل مساحة مربع طول ضلعه ١ قدَم.

لاحظ عزيزي الدارس، بأن المستطيل هو اتحاد أربع قطع مستقيمة، أي أن التعريف الرياضي للمستطيل هو مجموعة النقاط التي تقع على محيط المستطيل، الاّ أننا نستخدم العبارة "مساحة المستطيل" للدلالة على مساحة المنطقة المحصورة داخل المستطيل. وبالمثل فعندما نقول "مساحة الدائرة" فاننا نعني مساحة المنطقة المحصورة داخل الدائرة.

لاحظ عزيزي الدارس، أنه اذا كانت أبعاد مستطيل ما هي ١٠ انش ، ٧ انش، فان:

مساحة المستطيل = ١٠ انش × ٧ انش

= ٧٠ انش^{٢}

حيث يمثل الرمز "انش^{٢}" مساحة مربع طول ضلعه يساوي ١ انش.

نخلص مما سبق الى أن وحدات قياس المساحة هي "وحدات مربعة" مثل:

كم^{٢} ، م^{٢} ، دسم^{٢} ، سم^{٢} ، (ياردة)^{٢} ، قدَم^{٢} ، انش^{٢} .

حيث تعني الرموز السابقة نفس المفهوم الذي سبق وعرّفناه في مقدمة هذا البند.

واليك عزيزي الدارس، العلاقة بين وحدات قياس المساحة والتي نستخدمها عند التحويل من مقياس الى آخر أو من وحدة قياس مساحة الى مساحة أخرى.

١ كم^{٢} = (١ كم) × (١ كم) = (١٠٠٠ م) (١٠٠٠ م) = ١٠٠٠٠٠٠ م^{٢}

١ م^{٢} = (١ م) × (١ م) = (١٠ دسم) (١٠ دسم) = ١٠٠ دسم^{٢}

وبالمثل:

١ دسم^{٢} = ١٠٠ سم^{٢} ١ (ياردة) ^{٢} = ٩ قدَم^{٢}

١ سم^{٢} = ١٠٠ مللم^{٢} ١ قدَم^{٢} = ١٤٤ انش^{٢}

ومن الممكن ايجاد العلاقة بين مقاييس المساحة الانجليزية والمقاييس الفرنسية بملاحظة أن:

١ انش = ٢,٥٤ سم

١ قدَم = ٣٠,٥ سم

١ ياردة = ٩٢ سم

وعليه فان:

١ انش^{٢} = (٢,٥٤ سم) (٢,٥٤ سم) = ٦,٤٥١٦ سم^{٢}

١ قدَم^{٢} = (٣٠,٥ سم) (٣٠,٥ سم) = ٩٣٠,٢٥ سم^{٢} = ٩,٣٠٢٥ دسم^{٢}

(١ ياردة) ^{٢} = (٩٢ سم) (٩٢ سم) = ٨٤٦٤ سم^{٢}

مثال (٣-٧):

قطعة أرض على شكل مثلث قائم الزاوية، اذا علمت أن أطوال ضلع القائمة هي ٦٠ قدَم و ٨٠ قدَم.

أوجد مساحة قطعة الأرض بالأمتار المربعة.

الحل:

مساحة قطعة الأرض = $\frac{١}{٢}$ × ٦٠ × ٨٠ = ٢٤٠٠ قدَم^{٢}

وحيث أن ١ قدَم^{٢} = ٩٣٠,٢٥ سم^{٢}

فان المساحة المطلوبة = ٢٤٠٠ × ٩٣٠,٢٥ سم^{٢}

وبما أن كل سم٢ = $\frac{١}{١٠٠٠٠}$ م٢، فان

المساحة المطلوبة = $\frac{٢٤٠٠ \times ٩٣٠,٢٥}{١٠٠٠٠}$ = ٢٢٣,٢٦م٢

مثال (٣-٨):

أكتب المقدار ٣,٤ م^{٢} بدلالة الوحدات التالية:

(أ) دسم^{٢} (ب) سم^{٢} (جـ) انش^{٢}

(د) قدَم^{٢}

الحل:

(أ) ٣,٤ م^{٢} = ٣,٤ (١٠٠ دسم^{٢}) = ٣٤٠ دسم^{٢}

(ب) ٣,٤ م^{٢} = ٣٤٠ دسم^{٢} = ٣٤٠ (١٠٠ سم^{٢}) = ٣٤٠٠٠ سم^{٢}

(جـ) ٣,٤م٢ = ٣٤٠٠٠سم٢ = (٣٤٠٠٠) $\frac{١}{٦,٤٥١٦}$ انش ٢ = ٥٢٧٠ انش ٢

(د) ٣,٤ م^{٢} = ٥٢٧٠ انش^{٢}

= (٥٢٧٠) ($\frac{١}{١٤٤}$ قدم٢) = ٣٦,٦ قدم٢

تدريب (٣-٥):

أكتب المقدار ١٦ ياردة مربعه بدلالة الوحدات التالية:

(أ) قدَم^{٢} (ب) انش^{٢} (جـ) دسم^{٢} (د) م^{٢}

تدريب (٣-٦):

قطعة أرض على شكل شبه منحرف، طول ضلعيه المتوازيين ٣٠ م ، ٥٠ م وارتفاعه ٢٥ م.

أوجد مساحة قطعة الأرض باستخدام الوحدات التالية:

(أ) (الياردة)^{٢} (ب) قدَم^{٢}

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-٣).

مقاييس الحجوم

لقد تناولنا وحدات قياس المساحات في البند السابق، وقلنا أن الوحدات هي:

م^{٢} ، دسم^{٢} ، سم^{٢} ، انش^{٢} ، . . .

وقلنا أن الرمز م^{٢} يمثل مساحة مربع طول ضلعه ١م، وبالمثل عرّفنا الوحدات دسم^{٢}، سم^{٢}، قدَم^{٢}، انـش^{٢} .

وفي هذا البند سنقوم بتعريف وحدات قياس الحجم وهي:

م^{٣} ، دسم^{٣} ، قدَم^{٣} ، انـش^{٣} ، . . . وهكذا.

وكما عرّفنا الوحدات المربعة كمساحات المربعات، فاننا نعرّف الوحدات المكعبة كحجوم المكعبات وذلك كما يلي:

١ م^{٣} = حجم مكعّب طول ضلعه ١ م.

١ دسم^{٣} = حجم مكعّب طول ضلعه ١ دسم.

١ قدَم^{٣} = حجم مكعّب طول ضلعه ١ قدَم.

وبنفس الأسلوب الذي اتبعناه في البند السابق نستطيع ايجاد العلاقة بين وحدات قياس الحجم، وهذه العلاقات هي:

١م^{٣} = (١م) (١ م) (١ م) = (١٠ دسم) (١٠ دسم) (١٠ دسم) = ١٠٠٠ دسم^{٣}

وبالمثل:

١ دسم^{٣} = ١٠٠٠ سم^{٣} ١ (ياردة)^{٣} = ٢٧ قدَم^{٣}

١ سم^{٣} = ١٠٠٠ مللم^{٣} ١ قدَم^{٣} = ١٧٢٨ انش^{٣}

يمكنك عزيزي الدارس وباستخدام العلاقة بين الوحدات الانجليزية والوحدات الفرنسية لقياس الطول ، ايجاد العلاقة بين وحدات قياس الحجم فمثلاً:

١ قدَم^{٣} = (١ قدَم) (١ قدَم) (١ قدَم)

= (٣٠,٥ سم) (٣٠,٥ سم) (٣٠,٥ سم)

= ٢٨٣٧٢,٦٢٥سم^{٣}

١ انش^{٣} = (٢,٥٤ سم)^{٣}

= ١٦,٣٨٧ سم^{٣}

مثال (٣-٩):

متوازي مستطيلات أبعاده تساوي ١٠ سم ، ٨ سم ، ٥ سم. أوجد حجمه باستخدام الوحدات التالية:

(أ) دسم^{٣} (ب) مللم^{٣} (د) انش^{٣}

الحل: حجم متوازي المستطيلات = ١٠ × ٨ × ٥ = ٤٠٠ سم^{٣}

(أ) حيث أن سم٣ = $\frac{١}{١٠٠٠}$ د سم٣ ، فان

حجم متوازي المستطيلات = ٤٠٠($\frac{١}{١٠٠٠}$ د سم٣) = ٤٠٠, ٠ د سم٣

(ب) حيث أن ١ سم٣= ١٠٠٠ مللم٣، فان

حجم متوازي المستطيلات = (٤٠٠) (١٠٠٠ مللم٣) = ٤٠٠٠٠٠ مللم٣

(جـ) حيث أن ١سم٣ = $\frac{١}{١٦,٣٨٧}$ انش٣ ، فان

حجم متوازي المستطيلات = (٤٠٠) ($\frac{١}{١٦,٣٨٧}$ انش٣) = ٤١, ٢٤انش٣

تدريب (٧-٣):

كرة نصف قطرها ٧ سم. أوجد حجم الكرة باستخدام الوحدات التالية:

(أ) سم٣ (ب) دسم٣ (جـ) قدَم٣ (د) انش٣

تدريب (٨-٣):

حوّل المقدار ١٠٠ (ياردة)٣ الى الوحدات التالية:

(أ) قدَم٣ (ب) م٣

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-٤).

مقاييس الحرارة

هناك عدة مقاييس تُستخدم لقياس درجات الحرارة وأكثر هذه المقاييس استعمالاً:

(أ) الدرجات المئوية (وأحياناً تُسمى درجات سلسيوس)

(ب) الدرجات الفهرنهايتية.

وتُسمى الأداة التي تُستخدم لقياس درجات الحرارة "الثيرمومتر". وهناك نوعان من الثيرمومترات وهي الثيرمومترات الزئبقية والثيرمومترات الكحولية، حيث يُستخدم الزئبق في النوع الأول بينما يستخدم بعض أنواع الكحول في النوع الثاني.

في الثيرمومترات المدرجة بدرجات مئوية، يقابل الصفر درجة تجمد الماء النقي، ويقابل العدد ١٠٠درجة غليان الماء النقي تحت الظروف المعيارية، بينما في الثيرمومترات المدرجة

بدرجات فهرنهايتية تقابل درجة غليان الماء "٢١٢ درجة" ودرجة تجمد الماء "٣٢ درجة".

أي أن درجة حرارة الماء المتجمّد = صفر درجة مئوية

= ٣٢ درجة فهرنهايتية

ودرجة حرارة الماء الذي يغلي = ١٠٠ درجة مئوية

= ٢١٢ درجة فهرنهايتية

لاحظ عزيزي الدارس، أن كل ١٠٠ درجة مئوية تقابل ١٨٠ درجة فهرنهايتية.

(لأن التدريج المئوي من صفر الى ١٠٠ يقابل التدريج الفهرنهايتي ٣٢ الى ٢١٢).

وعليه فان كل درجة مئوية تساوي $\frac{١٨٠}{١٠٠} = \frac{٩}{٥}$ درجة فهرنهايتية .

وحيث أن الصفر المئوي يقابل ٣٢ درجة فهرنهايتية فاننا نستخدم العلاقات التالية للتحويل من درجات مئوية الى فهرنهايتية وبالعكس

فللتحويل من درجات مئوية الى فهرنهايتية نستخدم العلاقة

الدرجات المئوية $\times \frac{٩}{٥} + ٣٢$

وللتحويل من درجات فهرنهايتية الى مئوية نستخدم العلاقة

(الدرجات الفهرنهايتية $-$ ٣٢) $\times \frac{٥}{٩}$

مثال (٣-١٠):

اذا كانت حرارة جسم معدني ٣٠ درجة مئوية، فما هي حرارته بالدرجات الفهرنهايتية

الحل:

درجة الحرارة بالدرجات الفهرنهايتية = (درجة الحرارة بالدرجات المئوية) $\times \frac{٩}{٥} + ٣٢$

$٣٠ \times \frac{٩}{٥} + ٣٢ = ٨٦$

سنرمز للدرجات المئوية بالرمز "م" وللدرجات الفهرنهايتية بالرمز "ف".

فمثلاً ٣٠° م تعني "٣٠ درجة مئوية"

٨٠ ° ف تعني "٨٠ درجة فهرنهايتية"

مثال (٣-١١):

اذا كانت درجة الحرارة في واشنطن ٥٠° ف ، فما هي درجة الحرارة بالدرجات المئوية

الحل: باستخدام العلاقة (الدرجات الفهرنهايتية − ٣٢) × $\frac{٩}{٥}$

نحصل على أن درجة الحرارة المطلوبة تساوي:

(٥٠ − ٣٢) × $\frac{٩}{٥}$ = ١٠ م°

تدريب (٣-٩):

حوّل الى درجات فهرنهايتية

(أ)٣٥ ° م (ب)١٠ ° م (جـ) −٧° م

تدريب (٣-١٠):

حوّل الى درجات مئوية

(أ) ١٠٤ ° ف (ب) ٢٠ ° ف (جـ) −١٠ ° ف

هناك نظام آخر من الدرجات يُستخدم أحياناً لقياس درجات الحرارة، وهو ما يُسمى بنظام درجات الحرارة المطلق أو درجات كلفن.

نشــــاط

ابحث عن نظام درجات الحرارة المطلق، وجد طريقة للتحويل من هذا النظام الى الدرجات المئوية.

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-٥).

مقاييس الكتلة

بينما يستخدم النظام الفرنسي الكيلوغرام والغرام كوحدات أساسية لقياس الكتلة، يستخدم النظام الانجليزي الباوند والأونصة. وكما تعلم فان كلمة "كيلو" تعني "ألف"، وعليه فان:

١ كيلوغرام = ١٠٠٠ غم

فاذا رمزنا للكيلوغرام بالرمز "كغم" وللغرام بالرمز "غم".

فان ١ كغم = ١٠٠٠ غم

ويُعرّف الطن المتري بأنه ألف كيلوغرام

أما الباوند يساوي ١٦ أونصة

أما التقابل بين المقاييس الانجليزية والفرنسية، فهو كما يلي:

١ باوند = ٤٥٣,٦ غم

وحيث أن ١ باوند = ١٦ أونصة

فان ١أونصه = $\frac{٤٥٣,٦}{١٦}$ = ٢٨,٣٥غم

مثال (٣-١٢):

حوّل المقدار ١٠ كغم الى

(أ) باوندات (ب) أونصات

الحل:

(أ) حيث أن ١ باوند = ٤٥٣,٦ غم

= ٠,٤٥٣٦ كغم

فان ١ كغم = $\frac{١}{٠,٤٥٣٦}$ = ٢,٢ باوند

وعليه فان ١٠ كغم = (١٠) (٢,٢ باوند) = ٢٢ باوند

(ب) حيث أن ١٠ كغم = ٢٢ باوند وأن ١ باوند = ١٦ أونصة، فان

١٠ كغم = ٢٢ باوند

= ٢٢ (١٦ أونصة)

= ٣٥٢ أونصة.

تدريب (١١-٣):

حوّل الى غرامات

(أ) ٣ باوند　　　　(ب) ٨ أونصة

تدريب (١٢-٣):

حوّل الى أونصات

(أ) ٢,٥ كغم　　　　(ب)٤ كغم و ١٠٠ غم

- انتقل الى تقويم ذاتي (٣-٦).

الخاتمة

لقد تناولت هذه الوحدة بعض المقاييس غير المعيارية كالذراع والفرسخ كمقاييس للأطوال والمسافات، والصاع والمُد كمقاييس للكمية، وبعض المقاييس المعيارية، وقد تم تناول نظامين من المقاييس وهما:

النظام الانجليزي والنظام الفرسي

حيث يستخدم النظام الانجليزي المقاييس التالية:

الميل والياردة والقدَم والانش كمقاييس للأطوال ، والباوند والأونصة كمقاييس للكتلة.

ويستخدم النظام الفرنسي المقاييس:

كيلومتر ومتر وديسيمتر وسنتيمتر وملليمتر كمقاييس للأطوال، والكيلوغرام والغرام كمقاييس للكتلة.

كما تم تعريف الوحدات المربعة والمكعبة في النظامين كمقاييس للمساحات والحجوم على التوالي.

كما بيّنّا العلاقة بين النظامين حيث يمكن التحويل من نظام الى آخر وعالجنا أيضاً في هذه الوحدة مفهوم "مقياس الرسم" وبيّنّا كيفية استخدام الخرائط لتحديد المسافات بين مدن معينة، هذا بالاضافة الى قياس درجة الحرارة.

أسئلة التقويم الذاتي

تقويم ذاتي (٣-١):

(١) حوّل الى انشات

(أ) ٢٠ قدَم (ب) ٣ ميل و ١٠ قدَم

(٢) حوّل الى ديسيمترات

(أ) ٢ كيلومتر و ٤٣ متر (ب) ٣٢ متر و ١٣٠ سنتيمتر

تقويم ذاتي (٣-٢):

(١) يُراد رسم خارطة لدولة ما، اذا علمت أن شكل الدولة التقريبي هو مستطيل أبعاده ٥٠٠ كم، ٢٠٠ كم

فهل تعتقد أن مقياس رسم ١ : ١٠٠٠٠٠ مناسب لرسم الخارطة ؟ علل.

(٢) اذا كان مقياس رسم خارطة هو ١ : ١٠٠٠٠٠ وكانت المسافة بين مدينتين مثل أ ، ب تساوي ١٣,٧ سم، فما هي المسافة الفعلية بين المدينتين مقدرة

(أ) بالكيلومترات (ب) بالأميـال

تقويم ذاتي (٣-٣):

(١) أكتب المقدار ٨,٥ م^{٢} بدلالة الوحدات التالية:

(أ) دسم^{٢} (ب) قدَم^{٢}

(٢) أكتب المقدار ٤٠٠ قدَم^{٢} بدلالة الوحدات التالية:

(أ) (الياردة)^{٢} (ب) انش^{٢} (جـ) م^{٢} (د) دسم^{٢}

تقويم ذاتي (٣-٤):

(١) مخروط قائم نصف قطر قاعدته ١٠ سم وارتفاعه ٨ سم. أوجد حجم المخروط القائم باستخدام الوحدات التالية:

(أ) دسم^{٣} (ب) انش^{٣}

(٢) منشور قائم قاعدته مثلث قائم الزاوية، اذا كان طول أحد أضلاع المثلث ٨ سم وطول الوتر ١٠ سم، اذا علمت أن ارتفاع المنشور يساوي ٥ سم. أوجد حجمه

باستخدام الوحدات التالية:

(أ) انش^{٣} (ب) قدَم^{٣}

تقويم ذاتي (٣-٥):

(١) حوّل الى درجات مئوية

(أ) ٧٠° ف (ب) –٢٠° ف

(٢) حوّل الى درجات فهرنهايتية

(أ) ٣٧° م (ب) –٢٠° م

(٣) ما هي الدرجة الفهرنهايتية التي تقابل نفس الدرجة المئوية ؟

تقويم ذاتي (٣-٦):

(١) حوّل الى أونصات

(أ) ٣,٢ باوند (ب) ٨٢٠ غم

(٢) حوّل الى غرامات

(أ) ٤٠ باوند (ب) ٨٦ أونصة

المصادر والمراجع

(١) عوض، عدنان، (٢٠٠٠)، "**مبادىء الرياضيات لتأهيل المعلمين**"- الجزء الثالث، دار الكتاب الجديدة المتحدة، بيروت، لبنان.

(٢) عزه، حسن، النتشه، محمد، (١٩٩٧)، "**الهندسة الاقليدية**"، منشورات جامعة القدس المفتوحة.

(3) Moser, J.M., (1971), **"Modern Elementary Geometry"**, Prentice-Hall, New Jersey, U.S.A.

الوحـــدة الرابعـة

الوحـــدة الرابعة

حل المسألة الرياضية

إعـــــداد

د. أحمــد محمــد المقــدادي

محتويات الوحدة الدراسية

المواد المساندة للوحدة الدراسية

١ – كرسوع، أحمد علي والمقدادي، أحمد محمد ، (٢٠٠٣)، أنماط الاتصال الشائعة بين طلبة الثامن الأساسي في مجموعات التعلم التعاوني في حل المسألة الرياضية اللفظية الجبرية، **مؤتة للبحوث والدراسات**، المجلد الثامن عشر، العدد الأول، ص ص٦٩–٩٠.

٢ – أبو زينة، فريد كامل، (١٩٨٦)، استراتيجيات التدريس الشائعة لدى معلمي الرياضيات في المرحلة الإعدادية، **أبحاث اليرموك** (سلسلة العلوم الإنسانية والاجتماعية)، العدد الثاني، ص ص ١١٩–١٤١.

الأهداف التعليمية للوحدة الدراسية

١) أن يتعرف الدارس إلى مفهوم المسألة الرياضية ويميزها عن التمرين الرياضي.

٢) أن يوضح الدارس الشروط التي تجعل السؤال المعطى مسألة رياضية.

٣) أن يوضح الدارس أهمية موضوع حل المسألة في مناهج الرياضيات المدرسية.

٤) أن يتعرف الدارس إلى العوامل والصعوبات المؤثرة في قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية.

٥) أن يتعرف الدارس إلى العوامل التي تسهم في تنمية قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية.

٦) أن يكتسب الدارس مهارة تدريس حل المسألة الرياضية وفق استراتيجية جورج بوليا لتنظيم الحل.

٧) أن يكتسب الدارس مهارة استخدام الاستراتيجيات المختلفة لحل المسألة الرياضية في حل مسائل رياضية متنوعة.

٨) أن يكتسب الدارس مهارة التقويم الذاتي في تقويم أدائه في تدريس حل المسألة الرياضية.

٩) أن يكتسب الدارس مهارة تدريب طلابه على القيام بتقويم ذاتي لأدائهم في دراسة حل المسألة الرياضية.

مقدمـــــة

يحتل موضوع حل المسألة الرياضية أهمية كبرى في مجال تعليم وتعلم الرياضيات. فهي وسيلة ذات معنى للتدريب على المفاهيم والتعميمات والمهارات الرياضية. وهي كذلك وسيلة لإثارة التفكير وحب الاستطلاع عند الطالب مما يساعد على بناء معرفة رياضية جديدة.

وحل المسألة الرياضية عملية معقدة تحتاج من الطالب التفكير والتأمل في المسألة كما تحتاج من المعلم مراقبة الطالب أثناء تأمله في المسألة وتشجيعه على اكتشاف خطة الحل وعدم تقديم حلول جاهزة أو إلزام الطالب بقبول حل معين.

وعلى الرغم من وجود عديد من الصعوبات الكثيرة التي يواجهها الطالب في حل المسألة الرياضية إلا أنه يمكن التغلب على كثير من هذه الصعوبات إذا توافر منهاج للرياضيات

يركز بشكل جيد على موضوع حل المسألة الرياضية ومعلم مؤهل لديه الرغبة والحماس في تدريس مثمر لموضوع حل المسألة الرياضية وطالب لديه الصبر وقبول التحدي للتغلب على الصعوبات المرتبطة بالمسائل الرياضية التي تواجهه.

ومن الجدير بالذكر أن العديد من التربويين يستخدمون مصطلح حل المشكلة في المجالات المختلفة كالعلوم والرياضيات والدراسات الاجتماعية وغيرها، إلا أن حل المسألة الرياضية هو الاسم الأكثر استخداماً من قبل المتخصصين في مجال الرياضيات وأساليب تدريسها. لذا سوف تستخدم تلك الوحدة حل المسألة الرياضية بدلاً من حل المشكلة الرياضية.

أهمية حل المسألة في مناهج الرياضيات

حظي موضوع حل المسألة الرياضية باهتمام العديد من العاملين في مجال الرياضيات وأساليب تدريسها على المستويين العربي والعالمي. فقد أصدر المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية عام ٢٠٠٠ وثيقة خاصة بمبادئ ومعايير الرياضيات المدرسية ذكر فيها ١٠ موضوعات يجب أن يضمها منهاج الرياضيات من مرحلة رياض الأطفال وحتى الصف الثاني عشر وهذه الموضوعات هي: الأعداد والعمليات عليها، الجبر، الهندسة، القياس، تحليل البيانات والاحتمالات، حل المسألة، التفكير الرياضي، الاتصال، الربط، والتمثيل الرياضي.

وفي مجال حل المسألة الرياضية أشارت تلك الوثيقة أن مناهج الرياضيات المدرسية من مرحلة رياض الأطفال وحتى الصف الثاني عشر يجب أن تمكن الطالب من:

١) بناء معرفة رياضية جديدة وذلك من خلال حل المسألة.

٢) حل مسائل رياضية تتصل بمادة الرياضيات أو في سياقات أخرى.

٣) استخدام العديد من الاستراتيجيات المناسبة لحل المسالة الرياضية.

٤) القيام بمراقبة ذاتية لعملية حل المسألة والتأمل بها.

(NCTM, 2000, Pp. 51-54)

علاوة على ذلك فإن حل المسألة في الرياضيات يعد ركنا أساسيا ينظر إليه باعتباره:

١) عملية تنتج تعلما جديدا، حيث لا تقتصر المسائل على المحتوى الذي سبق شرحه بل يتم من خلاله تقديم معرفة جديدة.

٢) تنمية التفكير الرياضي عند المتعلم عن طريق إثارة الفضول الفكري وحب الاستطلاع

عنده.

٢) وسيلة ذات معنى للتدريب على المهارات والتعميمات الرياضية وإكسابها معنى.

٣) طريقة تمكن المتعلم من نقل المفاهيم والمهارات إلى مواقف جديدة (أبو زينة، ٢٠٠٣، ص ٢٩٢).

نشـــاط (١)

ناقش القول التالي: ينظر إلى موضوع حل المسألة الرياضية باعتباره الهدف الرئيسي لتعليم وتعلم الرياضيات؛ فتدريس المفاهيم والتعميمات والمهارات الرياضية ليس هدفاً بذاته وإنما وسيلة لتحقيق الهدف الرئيسي وهو إكساب الطالب القدرة على حل المسألة الرياضية.

التمارين الرياضية والمسائل في كتب الرياضيات المدرسية

ينظر كثير من المشتغلين في مجال الرياضيات وطرق تدريسها إلى موضوع حل المسألة الرياضية على أنه الهدف الأساسي لتعليم وتعلم الرياضيات وينظر هؤلاء إلى المسألة الرياضية على أنها موقف جديد ومتميز يواجه المتعلم ولا يكون في ذهنه حل جاهز لذلك الموقف في حينه.

ويتضح من هذا التعريف أنه ليس بالضرورة أن يكون كل موقف يأتي على شكل سؤال هو مسألة فاعتبار سؤال ما مسألة يختلف من طالب إلى آخر. فقد يعتبر سؤالا ما مسألة لطالب معين في صف معين، في حين يعتبر عمل روتيني لطالب آخر في صف لاحق.

وحتى يتصف الموقف بالنسبة لطالب معين بأنه مسألة يجب أن تتوافر فيه الشروط التالية:

١) أن يكون للطالب هدف محدد وواضح، يشعر بوجوده ويسعى لتحقيقه.

٢) وجود ما يمنع الطالب من المضي في تحقيق ذلك الهدف، وهذا المانع لا تزيله عادات الطالب وردود فعله العادية.

٣) اتضاح الموقف بالنسبة للطالب، حيث يرى مسألته ويحدد معالمها (أبو زينه، ٢٠٠٣، ص ص ٢٨٥-٢٨٦).

لذا ينبغي التمييز بين مصطلحي تمرين ومسألة. فالتمرين يمثل موقف يهدف إلى إكساب

الطالب مهارة رياضية معينة كإيجاد الجذر التربيعي أو التدريب على استخدام القوانين والمفاهيم الرياضية مثل إيجاد طول الوتر بالاعتماد على نظرية فيثاغورس. في حين تمثل المسألة موقفاً جديداً ومتميزاً يحتاج من الطالب تحليله والتأمل به وليس مجرد تطبيق للقوانين والمبادئ الرياضية. لذا تكون المسألة بمثابة تحد للطالب ويكون حلها قبول التحدي والتغلب عليه.

نشـــاط (٢)

١) ما رأيك بالرأي الذي يراه بعض المعلمين أن المسائل الرياضية هي مسائل كلامية يتطلب حلها تطبيق بعض القوانين أو التعميمات الرياضية؟ أدعم رأيك بأمثلة رياضية.

٢) اقرأ الأسئلة التالية وصنفها إلى مسائل رياضية أو تمارين رياضية معتمداً على الصف الموجود بجانب كل سؤال (برر إجابتك).

السؤال الأول: أي من الأعداد التالية يقبل القسمة على كل من ٥ ، ٢ معاً (مستوى السؤال لطالب في الصف الخامس): ٤٥٠ ، ٥٦٩، ١٣٤، ٤٢٠ .

السؤال الثاني: ما أكبر رقم تضعه مكان النجمة ليصبح العدد الناتج قابلاً للقسمة على ٦ (مستوى السؤال لطالب في الصف الخامس)

١٢* ، ١*٠ ، *٣٣ ، ١٢* ، ٢٥*١.

السؤال الثالث: تملأ حنفية خزاناً من الماء في ٣ ساعات بينما تحتاج حنفية أخرى إلى ٥ ساعات لتملأ الخزان نفسه. فما أقل عدد من الساعات يلزم كي تملأ كل حنفية عدداً صحيحاً من الخزانات المماثلة في السعة؟ (مستوى السؤال لطالب في الصف الخامس)

السؤال الرابع: حل المعادلتين الآنيتين التاليتين (مستوى السؤال لطالب في الصف التاسع):

ص = ١٢ ـــ س

٢س ـــ ص = ٥

السؤال الخامس: إذا علمت أن طول مستطيل يزيد عن عرضه بمقدار ٤ سم. وأن ضعفي طوله مضافاً إليه ثلاثة أمثال عرضه = ٣٨ سم ، فأوجد أبعاد المستطيل؟ (مستوى السؤال لطالب في الصف التاسع)

خطوات حل المسألة الرياضية

حيث أن المسألة عبارة عن موقف جديد ومتميز يواجه المتعلم ولا يكون في ذهنه حل جاهز لذلك الموقف في حينه. لذا تشكل المسألة تحد للطالب وبالتالي يكون حلها قبول التحدي والتغلب عليه. لذا ينصب دور المعلم بتوجيه ذهن الطالب للتفكير والتأمل في المسألة التي تواجهه بدلا من قيام الطالب بخطوات عشوائية لمحاولة حلها. ولعل الخطوات الأربع والمنسوبة لجورج بوليا تعد من الخطوات التي تساعد الطالب على تنظيم السير في حله للمسألة التي تواجهه. وهذه الخطوات هي
(أبو زينه، ٢٠٠٣، ص ص ٢٩٢–٢٩٩؛ Musser & Burger, 1988, pp 5-7):

١) فهــم المسألــة:

ويتم ذلك من خلال قيام الطالب بأمور منها:
– إعادة لنص المسألة بلغته الخاصة.
– تحديد المعطيات والمطلوب من المسألة.

٢) ابتكـار خطة الحـل:

وهذا الأمر يتطلب من المعلم مساعدة الطالب على تحديد الاستراتيجية المناسبة لحل المسألة والذي يعني قيام الطالب بتنظيم المعلومات المعطاة بشكل يسهل عليه

تحديد فيما إذا كانت المعطيات كافية أو أن هناك معلومات ناقصة. بالإضافة إلى معرفة فيما إذا كانت هناك معلومات إضافية لا تلزم لحل المسألة.

ومن الجدير ذكره أن هناك العديد من الاستراتيجيات المستخدمة لحل المسألة لكل منها طبيعة خاصة من المسائل التي تناسبها. وسوف يخصص بند خاص يعّرف ببعض هذه الاستراتيجيات ويعطي أمثلة تطبيقية عليها.

٣) تنفيذ خطة الحل:

حيث يقوم الطالب بتنفيذ الاستراتيجية أو مجموعة الاستراتيجيات التي اختارها. ومن المتوقع أن تكون هذه الخطوة سهلة نسبيا وبالذات إذا جاء ابتكار الخطة من قبل الطالب نفسه وتوفرت لديه المهارات الرياضية اللازمة لتنفيذ تلك الخطة.

٤) تقويم الحل:

ويتم ذلك من خلال أمور منها:

– التحقق من معقولية الجواب.

– التحقق من صحة الحل من خلال السير بخطوات الحل بشكل عكسي.

– البحث عن طرق أخرى لحل المسألة.

– توسيع مجال المسألة إلى شكل أكثر عمومية.

ونعرض فيما يلي مسألتين رياضيتين مع بيان طريقة تدريسهما وفق استراتيجية جورج بوليا المذكورة سابقاً.

المسألة الأولى:

باع تاجر سيارتين الأولى بسعر ٩٩٠٠ دينار وخسر بها ١٠٪ في حين باع الأخرى بالمبلغ نفسه (٩٩٠٠دينار) وربح بها ١٠٪. فهل ربح هذا التاجر أم خسر في تلك الصفقة وما مقدار ذلك؟ (هذه المسالة تناسب طلبة الصف الثامن الأساسي)

خطوات الحل:

١) الخطوة الأولى: قراءة المسألة وفهمها:

بعد أن يقرأ الطلبة المسألة يتحقق المعلم من فهمهم لها وذلك عن طريق توجيه أسئلة مثل:

– من يذكر لنا نص المسألة بلغته الخاصة؟

– ما ثمن مبيع السيارة الأولى وما هي النسبة المئوية للخسارة؟

– ما ثمن مبيع السيارة الثانية وما هي النسبة المئوية للربح؟

– هل المعلومات المعطاة كافية لحل المسألة أم أن هناك معلومات ناقصة؟

٢) الخطوة الثانية: ابتكار خطة الحل

وهنا يوجه المعلم بعض الأسئلة التي تساعد الطلبة على اكتشاف خطة الحل مثل:

– ما النسبة المئوية للشراء؟

– ما النسبة المئوية لمبيع السيارة الأولى؟

– ما ثمن شراء السيارة الأولى؟

– ما النسبة المئوية لمبيع السيارة الثانية؟

– ما ثمن شراء السيارة الثانية؟

– ما ثمن مبيع السيارتين معاً؟

– ما ثمن شراء السيارتين معاً؟

– أي المبلغين هو الأكثر؟

– ماذا تستنتج؟

٣) الخطوة الثالثة: تنفيذ خطة الحل

حيث يحل الطلبة المسألة من خلال إجابتهم عن الأسئلة المطروحة في الخطوة السابقة ويمكن أن يكون الحل على النحو التالي:

- النسبة المئوية للشراء = ٪١٠٠
- بما أن التاجر باع السيارة الأولى بخسارة قدرها ٪١٠ فإن النسبة المئوية لمبيع السيارة الأولى هو ٪٩٠.
- يستخدم الطالب موضوع النسبة والتناسب ليحصل على ثمن شراء السيارة الأولى هكذا:

٩٠ ٪ تقابل ٩٩٠٠ دينار

١٠٠ ٪ تقابل س

ومنها س = ١١٠٠٠ دينار ثمن شراء السيارة الأولى.

- بما أن التاجر باع السيارة الثانية بربح قدره ٪١٠ فإن النسبة المئوية لمبيع السيارة الثانية هو ٪١١٠
- يستخدم الطالب موضوع النسبة والتناسب ليحصل على ثمن شراء السيارة الثانية هكذا:

١١٠ ٪ تقابل ٩٩٠٠ دينار

١٠٠ ٪ تقابل س

ومنها س = ٩٠٠٠ دينار ثمن شراء السيارة الأولى.

- ثمن مبيع السيارتين ٩٩٠٠+٩٩٠٠ = ١٩٨٠٠ دينار
- ثمن شراء السيارتين ١١٠٠٠+٩٠٠٠ = ٢٠٠٠٠ دينار
- نلاحظ أن ثمن الشراء أعلى من ثمن المبيع بمقدار ٢٠٠ دينار.
- لذا تستنتج أن التاجر خسر ٢٠٠ دينار في تلك الصفقة.

٤) الخطوة الرابعة: تقويم الحل

ويتم تقويم الحل من خلال أمور منها التأكد من صحة الجواب، أو التأكد من صحة كل خطوة من خطوات الحل. كما يمكن أيضاً توسيع مجال المسألة عن طريق إجراء تغيير في ثمن المبيع والنسبة المئوية للربح أو الخسارة.

المسألة الثانية:

ينتج مصنع للبلاط صنفين من البلاط المتساوي الأبعاد. فإذا أنتج في الساعة الواحدة ١٥٠ بلاطة من الصنف الأول و ١٣٥ من الصنف الثاني، وأراد صاحب المصنع أن يضع الإنتاج في صناديق خشبية متساوية السعة بحيث لا يخلط الصنفين في الصندوق الواحد فما أكبر عدد من البلاط يتسع الصندوق الواحد ضمن هذه الشروط؟ (هذه المسألة تناسب طلبة الصف الخامس الأساسي)

خطوات الحل:

١) الخطوة الأولى: قراءة المسألة وفهمها:

بعد أن يقرأ الطلبة المسألة يتحقق المعلم من فهمهم لها عن طريق توجيه أسئلة مثل:

- من يذكر لنا نص المسألة بلغته الخاصة؟
- ما مقدار الإنتاج في الساعة الواحدة لكل صنف من أصناف البلاط؟
- ما الشروط التي يجب أن تتوافر في الصناديق المراد وضع الإنتاج بها وما الشروط التي يجب أن تتوافر في البلاط نفسه؟
- هل المعلومات المعطاة كافية لحل المسألة أم أن هناك معلومات ناقصة؟

٢) الخطوة الثانية: ابتكار خطة الحل

وهنا يوجه المعلم بعض الأسئلة التي تساعد الطالب على اكتشاف خطة الحل مثل:

- هل يمكن أن يوضع البلاط في صندوق يتسع لبلاطة واحدة؟
- أليس هناك صندوق أكبر منه يخدم شروط المسألة؟
- ما رأيك بصندوق يتسع إلى ٣ بلاطات؟
- أليس هناك صندوق أكبر منه يخدم شروط المسألة؟ وهكذا حتى يتوصل الطالب أن هذه المسألة يمكن أن تحل عن طريق استخراج القاسم المشترك الأكبر للعددين ١٥٠ و ١٣٥.

٣) الخطوة الثالثة: تنفيذ خطة الحل.

حيث يقوم الطلبة بتنفيذ الحل من خلال استخراج القاسم المشترك الأكبر للعددين ١٥٠ و ١٣٥ فيكون هو أكبر صندوق يحقق شروط المسألة. ثم يكلف أحد الطلبة بكتابة الحل على السبورة.

٤) الخطوة الرابعة: تقويم الحل

يمكن تقويم الحل من خلال التأكد من عدم وجود رقم أكبر من الجواب المستخرج بحيث يخدم شروط المسألة. كما يمكن توسيع مجال المسألة من خلال تغيير الأرقام المعطاة في المسألة أو إضافة صنف ثالث من الإنتاج وبواقع ١٢٠بلاطة في الساعة.

نشـــاط (٣)

باعتبارك مدرساً لمادة الرياضيات، وضح كيف يمكنك تدريس حل المسائل التالية وفق استراتيجية جورج بوليا المذكورة سابقاً:

١) **المسألة الأولى**) عدد مؤلف من رقمين وقيمته تساوي ٧ أمثال مجموع رقميه. وإذا عكس وضع الرقمين يقل الناتج عن العدد الأصلي بمقدار ١٨ فما هو العدد؟

٢) **المسألة الثانية**) أثبت صحة النظرية التالية:

مجموع الزوايا الداخلة في المثلث تساوي ١٨٠ درجة.

٣) **المسألة الثالثة**) أراد نجار أن يصنع رفوفاً متساوية الطول وذلك باستخدام قطعتين من الخشب طول الأولى ٧٢ سم وطول الثانية ٤٨ سم، فما أكبر طول للرف الواحد يمكن صناعته وما عدد الرفوف المصنوعة إذا تمت الاستفادة من جميع الخشب المتوفر دون إتلاف جزء منه؟

العوامل المؤثرة في قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية

ترتبط قدرة الطلبة على حل المسائل الرياضية بعوامل عدة منها ما يتصل بالطالب نفسه وبالقدرات التي يمتلكها كقدرته القرائية والرياضية ومنها ما يتصل بالمسألة نفسها كعدد الخطوات اللازمة لحلها ووجود معلومات ناقصة أو وجود معلومات إضافية لا صلة لها بالحل. وقد أورد كل من المغيرة (١٩٨٩) وأبو زينة (٢٠٠٣) جملة من العوامل التي تؤثر في قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية والتي يسهم عدم امتلاكها في زيادة صعوبة المسألة عند الطالب ومن هذه العوامل ما يلي:

١) ضعف القدرة على فهم المسألة وما يرتبط بذلك من عدم القدرة على تحديد المعطيات والمطلوب.

٢) ضعف القدرة على اختيار الاستراتيجية المناسبة لحل المسألة.

٣) ضعف القدرة على اختيار المهارات الرياضية المناسبة لحل المسألة.

٤) ضعف القدرة على وضع خطة منظمة ومناسبة لحل المسألة.

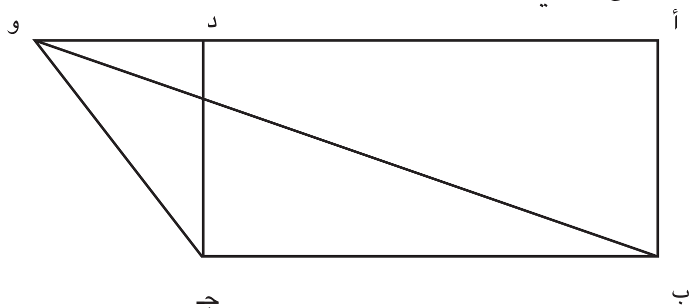
٥) ضعف القدرة على استخدام التخمين بشكل مناسب من أجل الحصول على جواب سريع أو الحكم على معقولية الجواب الذي توصل إليه (المغيرة، ١٩٨٩، ص ص

١٥١–١٥٩، أبو زينه،٢٠٠٣،ص ص ٣٠٤–٣٠٨).

علاوة على ذلك فإن أسلوب صياغة المسألة يؤثر في مقدرة الطالب على حلها. فعلى سبيل المثال يعد استخدام الرسوم التوضيحية افضل من استخدام الصورة اللفظية فقط. ويزيد من مقدرة الطالب على حل المسألة الرياضية. كذلك لنوع المطلوب من المسألة أثر في مقدرة الطالب على حلها. فالمسألة التي يكون المطلوب فيها برهان قضية معينة اصعب من المسألة التي يكون المطلوب فيها إيجاد حسابات معينة (انظر انشطة وتمارين رقم ٤). (أبو زينه،٢٠٠٣،ص ص ٣٠٤–٣٠٨).

نشـــاط (٤)

ادرس النماذج الأربعة التالية لصياغة المسألة المعطاة ثم حدد أبرز الصعوبات التي قد يواجهها الطالب عندما يكلف بحل المسألة في كل نموذج من النماذج الثلاثة الآتية:



* انظر الملحقين (١و ٢) ص١٤٢ إلى ١٤٦

نموذج «أ»:

في الشكل السابق أ ب ج د مستطيل، مد أ د على استقامته إلى و ، اثبث أن:
مساحة المثلث و ب ج تكافيء نصف مساحة المستطيل أ ب ج د.

نموذج «ب»:

في الشكل السابق أ ب ج د مستطيل، مد أ د إلى و ، فإذا كان أ ب = ٥ سم ، ب ج = ٧ سم. أوجد مساحة المثلث و ب ج.

نموذج «ج»:

أ ب ج د مستطيل، مد أ د إلى و ، اثبث أن:
مساحة المثلث و ب ج يكافيء نصف مساحة المستطيل أ ب ج د.
ملاحظة: الرسم غير معطى في نص المسألة في النموذجين ج ، د.

تنمية قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية

حل المسألة الرياضية عملية معقدة تقع في قمة الهرم المعرفي عند جانييه، وتحتاج من الطالب إلى الاستبصار والتحليل. وحل المسألة ليست مجرد تطبيق القوانين المتعلمة سابقا بل هي عملية تنتج تعلما جديدا. ونظراً لأهمية إكساب الطالب القدرة على حل المسألة الرياضية ليكون قادراً على حل مشكلاته الحياتية جاءت الحاجة الماسة لتنمية قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية. وهذا الأمر يتطلب العناية بإعداد منهاج للرياضيات يركز على تعليم حل المسألة الرياضية. كما يتطلب أيضاً العناية بإعداد وتأهيل معلم الرياضيات ليكون قادراً على تدريس مثمر لحل المسألة، بالإضافة إلى العناية بالطالب نفسه والذي تقع على كاهله المسؤولية الكبرى في تنمية قدرته على حل المسألة الرياضية. يمكن القول أن منهاج الرياضيات يلعب دوراً رئيساً في إكساب الطالب القدرة على حل المسألة الرياضية وذلك من خلال تركيزه على تطبيق خطوات حل المسألة الرياضية في حل مسائل حياتية حقيقية وعدم الاكتفاء بعرض تدريبات روتينية مباشرة تعطى كتطبيق مباشر على تعميم أو خوارزمية معينة.

أما بخصوص تأهيل معلم الرياضيات فقد أشارت بعض الدراسات إلى أهمية دور المعلم في إكساب الطلبة القدرة على حل المسالة الرياضية وذلك باعتباره النموذج الذي يقتدى من قبل الطلبة. ودعت تلك الدراسات إلى تدريب المعلمين على المهارات المختلفة المرتبطة بحل المسألة الرياضية كالتدريب على استخدام استراتيجية جورج بوليا في حل المسألة الرياضية. بالإضافة إلى التركيز على معتقدات المعلم والمرتبطة بحل المسألة الرياضية كعدم تقديم حلول جاهزة أو إلزام الطلبة بقبول حل معين أو الإكثار من تقديم المساعدة للطلبة، بل مراقبة الطلبة أثناء الحل وتشجيعهم على اكتشاف خطة الحل وتنفيذها ومن ثم التأكد من صحة الحل بأنفسهم (Wilson et al., 1993).

أما بما يتعلق بتدريس حل المسألة الرياضية فينبغي على المعلم تدريب الطلبة على مهارة طرح الأسئلة وذلك من خلال الطلب منهم إجراء بعض التعديلات على المسألة المعطاة كتحويل المجهول في المسألة إلى قيمة معطاة وبالعكس أو إضافة بعض الشروط إلى نص المعطاة أو حذف بعض هذه الشروط (Bergeson, 2000, Pp. 35-38).

ويورد موسيس وبجورك وجولدنبيرغ (١٩٩٠) مجموعة من الإرشادات التي ينصح المعلم باستخدامها من أجل تنمية قدرة الطلبة على حل المسألة الرياضية. ومن هذه الإرشادات ما يلي:

١) درب الطلبة على التركيز في المعلوم والمجهول والشروط في المسألة.

٢) درب الطلبة على البدء بأشياء حسية مرتبطة بالمسألة المعطاة.

٣) شجع الطلبة على التخيل والتأمل من أجل صياغة مسائل جديدة.

٤) شجع الطلبة على الاستفادة من الأسئلة الموجودة في كتابهم المقرر.

٥) تجنب (كمعلم) طرح أسئلة ذات إجابة محددة.

٦) شجع الطلبة على اختيار الأسئلة التي يرغبون بحلها ولا تفرض عليهم وقتا محددا لإكمال الحل.

٧) شجع الطلبة على التعاون فيما بينهم أثناء التفكير بحل المسألة.

(Moses, Bjork & Goldenberg, 1990)

كما يورد هاتفيلد وادواردز وبيتر (Hatfield, Edwards, & Bitter, 1993) مجموعة من الإرشادات الموجهة للمعلم لتنمية قدرة طلبته على حل المسألة الرياضية أهمها:

١) اختر بعناية مستوى صعوبة المسائل الرياضية التي ستكلف طلبتك بحلها فالطلبة يضجرون من حل المسائل السهلة جدا أو الصعبة جدا.

٢) درب طلبتك على تحليل المسألة ليصبحوا قادرين على تمييز ثلاثة أنماط من المعلومات:

– معلومات مطلوبة وهي الحل نفسه.

– معلومات معطاة وهي المفروضة في المسألة.

– معلومات لازمة وهي تلك المعلومات غير المذكورة في نص المسألة لكنها تلزم لحل تلك المسألة.

٣) اطرح على طلبتك أسئلة من النوع الواضح والمحدد وهذا يتطلب التأكيد على استخدام لغة رياضية دقيقة.

٤) نوّع من الأسئلة المطروحة فالإكثار من طرح أسئلة من نمط واحد يؤدي إلى الضجر والملل عند الطلبة.

٥) أجعل عملية طرح الأسئلة ركناً أساسياً من الموقف الصفي وليس معزولاً عنه.

أخيراً، وحيث أن تنمية القدرة على حل المسألة تقع على عاتق الطالب في المقام الأول فإن موسر وبيرقر (Musser & Burger, 1988; Pp. 17-18) يوردان مجموعة من النصائح المقدمة من طلبة اعتبروا ناجحين في حل المسألة الرياضية. حيث اعتبرت هذه النصائح بمثابة الطريق إلى تنمية قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية. ومن هذه النصائح:

١) اقبل التحدي المرتبط بحل المسألة.

٢) اكتب المسألة بلغتك الخاصة.

٣) أعط نفسك الوقت الكافي للتفكير وإعادة التفكير في المسألة.

٤) تحدث مع نفسك حول المسألة واسأل نفسك عددا من الأسئلة حولها.
٥) حاول أن تحل المسألة باستخدام أرقام ابسط كلما كان ذلك ممكنا.
٦) أعط نفسك فرصة للراحة ولكن عد ثانية للتفكير في حل المسألة المعطاة.
٧) انظر إلى المسألة بأكثر من طريقه.
٨) استعرض الاستراتيجيات المختلفة لابتكار خطة الحل علك تجد واحدة منها تساعدك في حل المسألة التي تبحث عن حلها.
٩) كثير من المسائل تحل بأكثر من طريقة، ولكن يكفيك واحدة لتعد ناجحاً.
١٠) لا تتردد بتغيير طريقتك في الحل إن كانت تلك الطريقة غير مثمرة.
١١) استخدم طريقة بوليا في تنظيم الحل فالتنظيم يساعدك في حل المسألة.
١٢) قيامك بحل أكبر قدر ممكن من الأسئلة يزيد من ثقتك بنفسك في القدرة على حل المسألة.
١٣) إذا لم تحرز تقدما في حل المسألة المعطاة، فقم بقراءة المسألة ثانية فقد يكون السبب مرتبطا في فهم خاطئ للمسألة.
١٤) قم بصياغة أسئلة ثم اعمل على حلها لان ذلك يساعد في تطوير قدرتك على حل المسألة.
١٥) قم بكتابة الحل بشكل واضح تماما بحيث يمكنك فهم الحل المكتوب ولو بعد مضي عشرة سنوات.
١٦) مساعدتك الطلبة الآخرين في حل المسألة يسهم في تطوير قدرتك على حل المسألة؛ ولكن لا تقدم حلولا جاهزة، بل قدم إرشادات فقط

نشـــاط (٥)

١) إقرأ المسالة التالية وحدد فيما إذا احتوى نصها على معلومات إضافية لا تلزم لحلها:

اشترى مكتب عقاري قطعة أرض مساحتها ١٠٠٠ متر مربع بسعر ١٠٠٠٠ دينار وباعها بسعر ١٢٠٠٠ دينار. احسب النسبة المئوية للربح.

٢) إقرأ المسائل التالية وحدد فيما إذا كانت المعلومات كافية لحلها أم لا على أن تشير للمعلومات الناقصة والتي تلزم للحل:

أ) ارتفع سعر بضاعة بمقدار ١٠٪ ثم عاد وانخفض بمقدار ١٠٪. أي السعرين كان أكبر قبل الارتفاع أم بعد الانخفاض؟

ب) أ ب ج مثلث قائم الزاوية ب، مر بالرأس ب مستقيم خارج المثلث ثم انزل من أ، ج العمودان أد، ج و. أحسب قياس الزاوية و ج ب.

ج) أ ب ج مثلث، س منتصف ب ج، ص منتصف أ س. أثبت أن مساحة المثلث ب س ص= ربع مساحة المثلث أ ب ج.

٣) يتطلب حل المسألة الرياضية أن يقوم الطالب بالبحث عن معلومات غير معطاة في نص المسألة ولكن بمقدوره إيجادها. إقراء المسألة التالية وحدد المعلومات غير المعطاة في نص المسألة والتي تلزم لحلها:

باع تاجر سيارتين الأولى بسعر ٩٩٠٠ دينار وخسر بها ١٠٪ في حين باع الأخرى بالمبلغ نفسه (٩٩٠٠دينار) وربح بها ١٠٪. فهل ربح هذا التاجر أم خسر في تلك الصفقة وما مقدار ذلك؟

٤) يحصل وأن تحتوي المسألة على معلومات متناقضة. إقرأ المسالة الرياضية التالية وحلولها المختلفة ثم حدد التناقض الموجود في نصها ثم اقترح تعديلاً يزيل هذا التناقض.

أ ب ج مثلث قائم الزاوية في ب فيه أ ج = ٢٠ سم، ب ج = ١٢ سم، وقياس الزاوية أ = ٢٠ درجة. أحسب طول الضلع أ ب.

الحل الأول: باستخدام قانون ظل تمام الزاوية ٢٠ يكون طول أ ب = ٣٢و٩ سم.

الحل الثاني: باستخدام قانون جيب تمام الزاوية ٢٠ يكون طول أب = ١٨و٨ سم

الحل الثالث: باستخدام نظرية فيثاغورس يكون طول أ ب = ١٦ سم.

استراتيجيات حل المسألة الرياضية

هناك العديد من الاستراتيجيات المستخدمة لحل المسألة الرياضية كل واحدة منها يناسبها طبيعة معينة من الأسئلة الرياضية. ونورد في هذا البند بعضاً من هذه الاستراتيجيات مع إعطاء بعض الأمثلة الرياضية كتطبيق عليها. علماً بأن معظم الاستراتيجيات التي تم اختيارها وردت في كثير من المشاريع الخاصة بتعليم وتعلم حل المسألة الرياضية والتي تبنت توصيات المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية كما ورد في وثيقة عام ٢٠٠٠ * .

■ انظر بعض مواقع الإنترنت مثل:

http://mathcounts.org/problems/strategies.htmi
http://gouchercenter.edu/jcampf/patterns.htm

أما الاستراتيجيات التي يغطيها هذا الفصل فهي:

١) إستراتيجية استخدام معادلة أو قانون.

٢) استراتيجية البحث عن نمط. .

٣) استراتيجية عمل قائمة منظمة أو جدول.

٤) استراتيجية عمل نموذج أو شكل.

٥) استراتيجية حل مسألة أسهل

٦) استراتيجية السير بخطوات الحل بشكل عكسي

٧) استراتيجية تحديد أهداف فرعية.

٨) استراتيجية الحذف أو المحاولة والخطأ.

وقد تم الاكتفاء بتقديم بطاقة عمل تساعد الطالب حل المسألة المعطاة على كل استراتيجية مع تقديم بطاقة تصحيح لبطاقة العمل تلك في الملحق (١). وذلك من أجل إتاحة الفرصة للطالب للتدرب على تنظيم خطوات الحل وفق طريقة بوليا. علاوة على ذلك فقد جاءت الأسئلة الموجودة في أنشطة وتدريبات (٦) كتدريب آخر على تلك الاستراتيجيات.

١) استراتيجية البحث عن قاعدة أو قانون لحل المسألة:

تصلح هذه الطريقة عندما يكون بمقدورنا استخدام المتغير للتعبير عن المجهول حيث

يتكون لدينا معادلة بحاجة إلى حل فيكون المتغير بمثابة حل مؤقت للمسألة ويكون حل المعادلة وإيجاد قيمة المتغير بمثابة الحل النهائي للمسألة. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (١)

في أحد أيام الشتاء شديدة البرودة كانت درجة الحرارة (٤٠-) فهرنهايت، وقد صرح المتنبئ الجوي الذي يقرأ من لوحة خاصة مكتوب عليها درجات الحرارة في كل من التدريجين المئوي والفهرنهايتي أنه من العجيب أن درجة الحرارة بالمقياس المئوي (٤٠-) أيضاً. فهل كلام المتنبئ الجوي صحيح أم لا؟

بطاقة العمل (١)

١) ما العلاقة بين التدريج المئوي والتدريج الفهرنهايتي اكتب تلك العلاقة بصيغة رياضية.
٢) باستخدام تلك الصيغة الرياضية، احسب قيمة درجة الحرارة بالمئوي إذا كانت درجة الحرارة بالفهرنهايتي = ٤٠- . ماذا تلاحظ؟
٣) احسب قيمة درجة الحرارة بالفهرنهايتي إذا كانت درجة الحرارة بالمئوي = ٤٠- . ماذا تلاحظ؟

٢) استراتيجية البحث عن النمط

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون بمقدورنا استخدام بعض الحالات في مسألة معينة للوصول إلى النمط العام التي تسير عليها كافة الحالات في تلك المسألة. وقد تكون هذه الأنماط على شكل أعداد أو أشكال هندسية. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٢)

في أحد الأيام طلب المعلم من الطالب فريدريك غاوس (والذي أصبح بعد ذلك عالم رياضيات مشهور) وكان في سن العاشرة أن يحسب مجموع جميع الأعداد المائة الأولى. فكر غاوس بالمسألة وقدم الجواب الصحيح خلال أقل من دقيقة. فكيف تم ذلك؟

لمعرفة تلك الطريقة اجب عن الأسئلة الواردة في بطاقة العمل التالية:

بطاقة العمل (٢)

١) أكتب الأعداد من ١ إلى ١٠٠ ثم أكتب تحتها الأعداد من ١٠٠ إلى ١
٢) ما مجموع ١ مع ١٠٠، ٢ مع ٩٩، ٣ مع ٩٨ ... ، ١٠٠ مع ١
٣) ماذا تلاحظ؟
٤) كم زوجاً من الأعداد تكون من الخطوة رقم ١؟
٥) على ماذا سوف نحصل لو جمعنا جميع الأزواج السابقة؟

٦) لذلك، ماذا يجب أن نعمل لو أردنا أن نجيب عن سؤال معلم غاوس؟
٧) عبر بالرموز عن النمط الذي توصلت إليه لو كان عدد الحدود هو ن من الحدود.

٣) استراتيجية عمل قائمة منظمة أو جدول

تساعد عملية تنظيم البيانات المعطاة في قائمة أو جدول على اكتشاف القاعدة التي تسير عليها البيانات الواردة في المسألة مما يسهل على الطالب مهمة حل المسألة. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٣)

جاء حاج هندي وسأل ابن حمزة– أثناء أدائه فريضة الحج– قائلاً إن علماء الهند قد عجزوا عن حل المسألة التالية:

توفي رجل وترك (٩) أولاد و (٨١) نخلة تعطي الأولى (١) رطلا من التمر سنويا. وتعطي الثانية (٢) رطلا من التمر سنويا. وتعطي الثالثة (٣) رطلا من التمر سنويا. وهكذا إلى النخلة (٨١) فإنها تعطي (٨١) رطلا من التمر سنويا. والمطلوب تقسيم هذه الأشجار بحيث يأخذ كل ابن ٩ أشجار من النخيل وبأوزان متساوية من الإنتاج السنوي. والمطلوب تحديد الطريقة التي حل بها ابن حمزة تلك المسألة.

بطاقة العمل (٣)

١) أكتب ما تنتجه أشجار النخيل على شكل متسلسلة.
٢) ما نوع تلك المتسلسلة ؟ وما مجموعها؟
٣) ما نصيب كل ابن من التمر؟
٤) اكتب ما تنتجه هذه الأشجار على شكل مصفوفة ٩ * ٩.
٥) ما مجموع ما تنتجه الأشجار ذات الأرقام
١، ١١، ٢١، ٣١، ٤١، ٥١، ٦١، ٧١، ٨١؟
٦) هل يمكنك وبنفس الطريقة البحث عن (٩) أشجار من النخيل تعطي المجموع نفسه من التمر يأخذها ابن آخر؟ اذكرها.

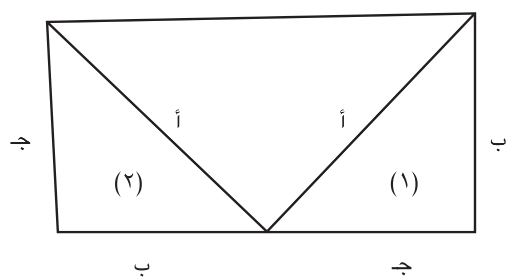
٤) استراتيجية عمل نموذج أو شكل:

عادة ما يتطلب حل المسألة القيام بعمل تمثيل محسوس أو شبه محسوس لها. وفي مثل تلك الحالة يساعد الرسم تقديم فهم افضل للمسألة وبالتالي يسهل على الطالب حلها. والرسم أنواع منه ما هو ضروري ولا يمكن الاستغناء عنه كما هو الحال في المسائل الهندسية ومنه ما هو مفيد ولكنه غير ضروري كما هو الحال في رسم الشجرة البيانية عند التحليل إلى العوامل أو كتابة عناصر الفراغ العيني لتجربة احتمالية معينة أو استخدام أشكال فن

لحل المسائل المتعلقة بالمجموعات وتمثيلها. والمثال التالي يمثل أحد الأمثلة التي يكون الرسم فيها ضرورياً.

مثال (٤)

يكثر الحديث عن الطرق المختلفة لبرهان نظرية فيثاغورس. ومن بين تلك الطرق الطريقة المسماة طريقة الرئيس الأمريكي غارفيلد. وقد اعتمدت تلك الطريقة على إنشاء شبه منحرف مؤلف من مثلين قائمين أضلاعهما ب، ج ومثلث آخر قائم ومتساوي الساقين طول ضلعيه المتساويين أ (انظر الشكل) (خوري، ١٩٩٦، ص ص ٣٢-٣٣).



بطاقة العمل (٤)

إرشاد: يمكنك برهان ذلك من خلال إيجاد مساحة شبه المنحرف عن طريق حساب مساحة المثلثات المكونة له ومقارنتها بالمساحة الكلية لشبه المنحرف التي تساوي نصف مجموع ضلعيه المتوازيين في البعد بينهما وذلك على النحو التالي.

١) احسب مساحة المثلث رقم ١

٢) احسب مساحة المثلث رقم ٢

٣) احسب مساحة المثلث رقم ٣

٤) احسب مساحة شبه المنحرف

٥) ما العلاقة بين مساحة المثلثات الثلاثة ومساحة شبه المنحرف؟

٦) ماذا تستنتج؟

٥) استراتيجية حل مسألة أسهل:

يكون من الصعب أحيانا حل المسألة المطلوبة وذلك بسبب صعوبة الأرقام فيها أو زيادة عدد الحالات الواجب تجريبها للوصول إلى القاعدة العامة. لذا يصبح من الأسهل حل تلك المسألة بأرقام أسهل أو حالات أقل. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٥)

افرض أن هناك ١٥من الرجال حضروا حفلة معينة وأن كل واحد منهم يريد أن يسلم على جميع الرجال في تلك الحفلة ، فكم عدد السلامات التي سوف تتم في تلك الحفلة إذا علمت أن كل رجل سوف يصافح كل رجل مرة واحدة فقط؟

بطاقة العمل (٥):

١) اكمل الفراغ في الجدول التالي:

عدد الرجال	عدد السلامات
٢ ٣ ٤ ٥ ن	

٢) بالاعتماد على القاعدة السابقة كم عدد السلامات لو كان عدد الحضور ١٥ ؟

٣) بالاعتماد على القاعدة السابقة كم عدد الحضور لو كان عدد السلامات ٢٨؟

٦) استراتيجية السير بخطوات الحل بشكل عكسي :

عادة ما نسير في حل المسألة من البداية حتى النهاية. ولكن يحصل أحياناً تعذر ذلك فنلجأ إلى تنفيذ خطوات الحل بشكل عكسي من النهاية حتى البداية. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٦)

بائع متجول يحمل سلة تفاح، دفعه الكرم أن أعطى لأول شخص يقابله نصف ما لديه من التفاح إضافة إلى تفاحة، وللشخص الثاني نصف ما تبقى لديه إضافة إلى تفاحة وللشخص الثالث نصف ما تبقى لديه إضافة إلى تفاحة. فإذا بقي لديه بعد ذلك تفاحة واحدة. فكم تفاحة كان معه أصلاً؟

بطاقة العمل (٦)

١) كم عدد الأشخاص الذين قابلهم البائع؟ وكم عدد التفاحات المتبقية معه بعد ذلك؟

٢) كم عدد التفاحات التي كانت مع البائع عند مقابلته للشخص الثالث؟ وضح إجابتك.

٣) كم عدد التفاحات التي كانت مع البائع عند مقابلته للشخص الثاني؟ وضح إجابتك.

٤) كم عدد التفاحات التي كانت مع البائع عند مقابلته للشخص الأول؟ وضح إجابتك.

٧) إستراتيجية تحديد أهداف فرعية:

يتطلب حل بعض المسائل القيام بحل بعض المسائل الفرعية المرتبطة بها. فبدلاً من حل المسألة بشكل متكامل نقوم بتجزئتها إلى مسائل فرعية ضمن المسألة المعطاة ثم حل هذه المسائل الفرعية فيكون حلها بمثابة حل للمسألة. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٧)

دخلت دراجتان نفقا في نفس اللحظة، الأولى من جهة الشرق والأخرى من الغرب وتسيران بسرعة ١٠كم/س ، ٨ كم/س على الترتيب. وفي لحظة دخولهما النفق ترك طائر الدراجة الأولى متجها إلى الثانية بسرعة ١٥كم/س واستمر بالطيران بين الدراجتين جيئة وذهابا. جد المسافة التي يقطعها الطائر لحظة التقاء الدراجتين علما بأن طول النفق ٩كم.

بطاقة العمل (٧):

١) ما المطلوب الرئيسي في المسألة؟ وما الهدف الفرعي الذي ينبغي إيجاده أولاً؟

٢) جد المسافة التي تقطعها الدراجة المتجهة من الشرق بدلالة (ن).

٣) جد المسافة التي تقطعها الدراجة المتجهة من الغرب بدلالة (ن).

٤) ما علاقة طول النفق بمجموع المسافتين؟

٥) كون المعادلة من (٣)، ثم جد قيمة (ن).

٦) احسب المسافة التي قطعها الطائر.

٨) استراتيجية الحذف أو المحاولة والخطأ:

نلجأ إلى المحاولة والخطأ عندما لا نكون متأكدين من طريقة حل المسألة المعطاة. ففي هذه الاستراتيجية نقوم باقتراح عدد من الحلول للمسألة المعطاة ثم نعمد إلى فحص صحة هذه الحلول للتأكد من صحتها. أما إذا تبين خطأ تلك الحلول نعمد إلى حذفها ثم نلجأ إلى محاولة جديدة، وهكذا حتى نتوصل إلى الحل الصحيح. والمثال التالي يوضح ذلك:

مثال (٨)

ذهب أحمد إلى السوق لشراء مجموعة من الكتب والمجلات عددها ٢٥. فإذا علمت أن عدد الكتب التي اشتراها يزيد ١٣ عن عدد المجلات، فما عدد الكتب التي اشتراها وما عدد المجلات؟

بطاقة العمل (٨)

١) المحاولة الأولى: افرض أنه اشترى ١٥ كتاباً و ١٠ مجلات:

– هل يتحقق الشرط الأول في المسألة؟

– هل يتحقق الشرط الثاني في المسألة؟

٢) في المحاولة الأولى كم يزيد عدد الكتب عن عدد المجلات؟

٣) ماذا ينبغي أن نعمل في المحاولة الثانية؟

٤) المحاولة الثانية: افرض أنه اشترى ٢٠ كتاباً و ٥ مجلات:

– هل يتحقق الشرط الأول في المسألة؟

– هل يتحقق الشرط الثاني في المسألة؟

٥) ماذا تلاحظ بالنسبة للمحاولة الثانية؟

٦) المحاولة الثالثة: افرض أنه اشترى ١٩ كتاباً و ٦ مجلات:

– هل يتحقق الشرط الأول في المسألة؟

– هل يتحقق الشرط الثاني في المسألة

نشاط (٦)

استخدم الاستراتيجية (الاستراتيجيات) المناسبة لحل المسائل التالية:

١) إذا قدت سيارتي بسرعة ٤٠ كم/ساعة أصل عملي متأخرا بمقدار ربع ساعة وإذا قدتها بسرعة ٦٠ كم/ساعة أصل عملي مبكراً بمقدار ربع ساعة. احسب المسافة بين بيتي ومكان عملي وما هو موعد الدوام في عملي علماً بأنني انطلق عند الساعة الثامنة صباحاً.

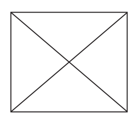
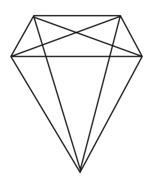
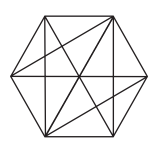
٢) رصدت علامات ستة طلاب ثم جرى ترتيبها تصاعدياً من الأصغر إلى الأكبر. فإذا كان معدل علاماتهم = ٣٥ في حين كان معدل علامات أول أربعة منهم = ٤٠، ومعدل علامات آخر أربعة منهم = ٣٠ فأحسب معدل علامات الطالبين الثالث والرابع.

٣) يستيقظ علي في الصباح للذهاب إلى المدرسة. فإذا علمت أنه بحاجة إلى ٥٠ دقيقة حتى يعد نفسه للخروج من البيت، كما أن الحافلة التي تقله إلى المدرسة تحتاج إلى ٣٠ دقيقة للوصول إلى المدرسة. في أي ساعة من الصباح يجب أن يستيقظ علي حتى يصل المدرسة قبل ٣٠ دقيقة من قرع الجرس الذي يقرع عند الساعة السابعة والنصف صباحاً.

٤) وصل أحد سكان العاصمة إلى بلدة مجاورة يسكنها ٥٠٠٠٠ ألف نسمة ومعه خبر يهمهم جميعاً فرواه إلى أول ٣ أشخاص قابلهم في الطريق ثم تولى كل واحد منهم رواية ذلك الخبر إلى ثلاثة آخرين، وهكذا استمرت العملية على نفس النمط حتى وصل الخبر لكافة سكان تلك البلدة. والمطلوب منك تحديد الوقت اللازم ليصل هذا الخبر لجميع سكان تلك البلدة علماً كل عملية إخبار تستغرق ربع ساعة؟

٥) استنتج قاعدة يمكنك من خلالها تحديد عدد الأقطار في أي مضلع وذلك عن طريقة تجريب بعض الحالات كالشكل الرباعي والخماسي والسداسي ثم توصل إلى قاعدة عامة تحدد من خلالها عدد أقطار أي مضلع مع تقديم برهان رياضي على صحة تلك القاعدة.

إرشاد: اكمل الجدول التالي ثم أجب عن الأسئلة التي تليه

الشكل	من خلال الرسومات				خلال العمليات الحسابية	
	عدد النقاط	عدد القطع المستقيمة	عدد الأضلاع	عدد الأقطار	عدد القطع المستقيمة	عدد الاقطار $\binom{ن}{٢}$ – ٢
	٤	٦	٤	٢	$\binom{٤}{٢}$ = ٦	٦ – ٤ = ٢
	٥	١٠	٥	٥	$\binom{٥}{٢}$ = ١٠	١٠ – ٥ = ٥
	٦	١٥	٦	٩	$\binom{٦}{٢}$ = ١٥	١٥ – ٦ = ٩

٢) ما الشكل الذي عدد أقطاره "٩"؟

٣) ما عدد القطع المستقيمة التي يمكن تكوينها من «ن» من النقط ليست على استقامة واحدة مع إهمال الترتيب ؟

٤) ماذا تمثل القطع المستقيمة في أي مضلع؟

٥) إذا فرضنا أن عدد الأضلاع في أي مضلع "ن" وعدد أقطار هذا المضلع "م" عبر بمعادلة رياضية تشمل عدد الأضلاع وعدد الأقطار وعدد القطع المستقيمة في المضلع.

٦) حل المعادلة الرياضية السابقة واستنتج عدد الأقطار "م" في أي مضلع.

٧) لدينا أربعة أشخاص يرغبون الخروج إلى النادي للعب معاً في لعبة تحتاج إلى ٢ في كل مرة. ولكن لكل واحد منهم ظروفه الخاصة في أيام اللعب.

الأول غير قادر على اللعب أيام السبت والثلاثاء والأربعاء.

الثاني يرغب اللعب أيام الاثنين والأربعاء والخميس.

الثالث عليه أن يبقى في البيت أيام الاثنين والخميس.

الرابع يمكنه اللعب أيام الثلاثاء والجمعة.

ولا أحد يرغب في اللعب أيام الأحد.

وفق هذه الشروط، اجب عما يلي:

١) هل يمكن لأي أثنين أن يجدا يوماً يلعبا معا به؟

٢) هل هناك أيام لا يمكن أن يتم بها اللعب؟

٣) هل هناك أيام يمكن أن يلعب بها أكثر من اثنين؟

٧) في برنامج اللغات الأجنبية في إحدى المدارس كان توزيع الطلبة حسب اللغة الأجنبية التي يدرسونها على النحو التالي:

– اللغة الإنكليزية	٢٨
– اللغة الفرنسية	٢٣
– اللغة الألمانية	٢٣
– اللغتين الإنكليزية والفرنسية	١٢
– اللغتين الإنكليزية والألمانية	١١
– اللغتين الفرنسية والألمانية	٨
– اللغات الثلاث معاً	٥

وكان المطلوب تحديد عدد هؤلاء الطلبة الملتحقين في هذا البرنامج.

ما رأيك في الحل التالي الذي قدمه أحد الطلاب:

٢٨+٢٣ + ٢٣ = ٧٤ على فرض أن كل طالب درس مادة أجنبية واحدة.

ولكن

١٢+١١+٨-٥= ٢٦ على فرض أن كل طالب درس أكثر من مادة.

لذلك ٧٤-٢٦=٤٨ هو عدد الطلبة الملتحقين في هذا البرنامج.

والمطلوب منك استخدام أشكال فن لمعرفة صحة أو خطأ الحل الذي قدم

البحث التجريبي وحل المسألة الرياضية

أجريت العديد من الدراسات التربوية ذات الصلة بحل المسألة؛ بعضها تناول العوامل والصعوبات المرتبة بحل المسألة، وبعضها تناول الفرق بين الطلبة المهرة وغير المهرة وصلة ذلك بحل المسألة، وبعضها تناول الطرق المناسبة لتدريس حل المسألة، وبعضها تناول معلم الرياضيات باعتباره النموذج الذي يقتدى من قبل الطالب للنجاح في حل المسألة. وقد تمخض عن هذه الدراسات العديد من النتائج المفيدة والمرتبطة في حل المسألة نورد أبرزها في النقاط التالية:

١) على الرغم من أن عدم فهم المسألة يؤثر سلبا في قدرة الطالب على حل المسألة ألا أن فهمها لا يضمن القدرة على حلها.

٢) كما أنه وبعد اكتشاف طريقة الحل فإن قدرة الطالب على حلها مرتبطة في إنجاز المهارات الرياضية التي تتطلبها عملية تنفيذ تلك الخطة.

٣) يوجد اختلاف بين الطلبة المهرة (Skilled) وغير المهرة (Unskilled) في القدرة على حل المسألة الرياضية بما يتعلق بسلوكهم أثناء حل المسألة الرياضية. فالطلبة غير المهرة ينظرون للمسألة التي يكلفون بحلها نظرة سطحية كربطها بمسائل سابقة بناء على طبيعة الأرقام المعطاة أو الترابط اللغوي الموجود بين المسألة الحالية والمسائل السابقة. في حين ينظر الطلبة المهرة في حل المسألة نظرة متعمقة وفاحصة.

٤) يسهم التعلم التعاوني والعمل في مجموعات في إكساب الطلبة القدرة على حل المسألة الرياضية وذلك لأن بيئة التعلم التعاوني تتيح الفرصة للطلبة للمناقشة وتبادل الآراء فيما بينهم من أجل الوصول إلى حل للمسألة المعطاة. *

٥) ترتبط القدرة على حل المسألة الرياضية بمهارة التفكير فوق المعرفي

(Metacognition) والذي يتضمن إدراك الطالب لذاته وقدراته الخاصة المرتبطة بحل المسألة والذي يعني أنه بمقدور الطالب الجيد القيام بمراقبة وضبط لعملياته العقلية أثناء حل المسألة الرياضية (Bergeson, 2000, Pp. 35-38) .

٦) على الرغم من أن تدريس حل المسألة الرياضية هو هدف عام للرياضيات. وأن هذا الهدف لا يتحقق من خلال اهتمام المعلمين بحل مسائل محددة، إلا أن اهتمام العديد من المعلمين والمنصب في حل مسائل معينة لا يعمل على تحقيق هذا الهدف.
**

نشاط (٧)
١) وضح المقصود بمهارة التفكير فوق المعرفي، وما علاقة تلك المهارة بقدرة الطالب على حل المسألة الرياضية؟ ٢) وضح الفرق بين الطالب الماهر والطالب غير الماهر بما يتعلق بسلوكهما أثناء حل المسألة الرياضية.

خـــاتمـــة

تناولت هذه الوحدة موضوعات متنوعة تقع ضمن حل المسألة الرياضية. فقد تناولت تلك الوحدة أهمية حل المسألة الرياضية في مناهج الرياضيات ثم ميزت بين التمرين الرياضي والمسألة الرياضية. كما تناولت تلك الوحدة بشيء من التفصيل العوامل المؤثرة في قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية بالإضافة إلى دور كل من المنهاج والمعلم والطالب نفسه في تنمية قدرة الطالب على حل المسألة الرياضية.

ونظراً لحاجة معلم الرياضيات للتدرب على استخدام خطوات حل المسألة الرياضية، فقد تناولت تلك الوحدة هذا الموضوع بشيء من التفصيل مع إعطاء بعض التطبيقات الرياضية على استخدام استراتيجية جورج بوليا في تدريس حل المسألة الرياضية.

كذلك ونظراً لأهمية دور الطالب في اكتشاف خطة الحل فقد ركزت هذه الوحدة على الاستراتيجيات المختلفة التي تساعد الطالب عل اكتشاف خطة الحل. وقد وفرت تلك الوحدة أمثلة رياضية توضح استخدام تلك الاستراتيجيات. علاوة على ذلك فقد وفرت تلك الوحدة بعض الملاحق ذات الصلة بموضوع حل المسألة الرياضية مثل أدوات التقويم الذاتي التي يمكن للمعلم وللطالب الانتفاع بهما في تعليم وتعلم حل المسألة الرياضية. بالإضافة إلى المواد المساندة ذات الصلة بموضوع حل المسألة الرياضية.

أسئلة التقويم الذاتي

السؤال الأول: اجب بنعم أم لا

١) تعد استراتيجية بوليا إحدى الاستراتيجيات المناسبة لتنظيم حل المسألة ( )

٢) المعلم الجيد هو الذي لا يبخل بتقديم المساعدة لمن يطلبها من طلابه أثناء حلهم للمسألة المعطاة ( )

٣) لا يعتبر الطالب ناجحا في حل المسألة ما لم يتمكن من الوصول لجميع الحلول الممكنة للمسألة المعطاة ( )

٤) من الأمور التي تساعد الطالب على أن يصبح ناجحا في حل المسألة قيامه بحل مسائل للآخرين ( )

٥) وفق المنهاج الأمريكي، تعد حل المسألة إحدى المعايير المرتبطة بالمحتوى الرياضي ( )

٦) وفق المنهاج الأمريكي، يعد التفكير الرياضي أحد المعايير المرتبطة بالعمليات الرياضية ( )

٧) ينظر إلى حل المسألة الرياضية باعتباره عملية مثمرة تنتج تعلما جديدا ( )

٨) يتطلب التفكير فوق المعرفي قيام المتعلم بعملية ادراك وضبط ذاتيين لقدراته الخاصة المرتبطة بحل المسألة الرياضية ( )

٩) تأتي خطوة تنفيذ خطة الحل من الخطوات السهلة على الطالب الذي يتلقى مساعدة كبيرة من الآخرين في خطوة ابتكار خطة الحل ( )

١٠) تتناول خطوة تقويم الحل في حل المسألة الرياضية السير في خطوات الحل بشكل عكسي ( )

١١) يسهم تدريب الطلبة على إجراء بعض التعديلات على المسألة المعطاة في تنمية قدرتهم على حل المسألة الرياضية ( )

١٢) يسعى العديد من المعلمين إلى تدريس حل المسألة الرياضية كهدف عام للرياضيات من خلال قيامهم بعرض حلول مسائل محددة في غرفة الصف ( )

١٣) يسهم تدريب الطلبة على تحليل المسألة الرياضية المعطاة في تنمية قدرتهم على حل المسألة الرياضية ( )

الإجابة الصحيحة لأسئلة التقويم الذاتي

رقم الفقرة	الإجابة الصحيح
١	نعم
٢	نعم
٣	لا
٤	لا
٥	لا
٦	نعم
٧	نعم
٨	نعم
٩	لا
١٠	نعم
١١	نعم
١٢	لا
١٣	نعم

حلول الأنشطة والتدريبات

الملحق (١)

بطاقة التصحيح (١)

١) م = $\frac{٩}{٥}$ (ف ـــ ٣٢)

٢) م = ٤٠– أي أن – ٤٠ بالتدريج الفهرنهايتي = ٤٠– بالتدريج المئوي.

٣) كذلك تكون ف = ٤٠– . أي أن ٤٠– بالتدريج المئوي = ٤٠– بالتدريج الفهرنهايتي.

بطاقة التصحيح (٢)

١) ١ + ٢ + ٣ + ... + ١٠٠

١٠٠ + ٩٩ + ٩٨ ... + ١

٢) ١٠١

٣) المجموع = ١٠١ دائماً هو مجموع العدد الأول والعدد الأخير في سؤال معلم غاوس.

٤) ١٠٠

٥) ضعف المجموع في مسألة معلم غاوس أي ١٠١ مضروبة في ١٠٠.

٦) يجب أن نقسم النتيجة في الخطوة السابقة على ٢.

٧) مجموع متسلسلة حسابية حدها الأول ١ وحدها الأخير (ن) وأساسها ١ وعدد حدودها (ن) يتحدد من القاعدة التالية: $\frac{ن}{٢}$ (١ + ن).

ففي مسألة معلم غاوس ينتج الجواب من قسمة عدد الحدود على ٢ ثم ضرب الناتج بحاصل جمع ١ مع ١٠٠. وبالتالي يكون الجواب هو حاصل ضرب ٥٠ في ١٠١.

بطاقة التصحيح (٣)

١) ١ + ٢ + ٣ + ٨١ ... +

٢) متسلسلة حسابية مجموعها ٣٣٢١

٣) ٣٦٩ رطلاً

٤)

١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦	١٧	١٨
١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧
٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢	٣٣	٣٤	٣٥	٣٦
٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥
٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠	٥١	٥٢	٥٣	٥٤
٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣
٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨	٦٩	٧٠	٧١	٧٢
٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١

٥) ٣٦٩ رطلاً وهذه الأشجار يمكن أن تعطى للابن الأول

٦) يمكن إعطاء الابن الثاني الأشجار رقم ٢، ١٢، ٢٢، ٣٢، ٤٢، ٥٢، ٦٢، ٧٢، ٧٣

كما يمكن إعطاء الابن الثالث الأشجار ٣، ١٣، ٢٣، ٣٣، ٤٣، ٥٣، ٦٣، ٦٤، ٧٤

كما يمكن إعطاء الابن الرابع الأشجار ٤، ١٤، ٢٤، ٣٤، ٤٤، ٥٤، ٥٥، ٦٥، ٧٥

كما يمكن إعطاء الابن الخامس الأشجار٥، ١٥، ٢٥، ٣٥، ٤٥، ٤٦، ٥٦، ٦٦، ٧٦

كما يمكن إعطاء الابن السادس الأشجار ٦، ١٦، ٢٦، ٣٦، ٣٧، ٤٧، ٥٧، ٦٧، ٧٧

كما يمكن إعطاء الابن السابع الأشجار ٧، ١٧، ٢٧، ٢٨، ٣٨، ٤٨، ٥٨، ٦٨، ٧٨

كما يمكن إعطاء الابن الثامن الأشجار ٨، ١٨، ١٩، ٢٩، ٣٩، ٤٩، ٥٩، ٦٩، ٧٩

كما يمكن إعطاء الابن التاسع الأشجار ٩، ١٠، ٢٠، ٣٠، ٤٠، ٥٠، ٦٠، ٧٠، ٨٠

ملاحظة) هناك حلول مختلفة لتلك المسألة ابحث عن بعضها

بطاقة التصحيح (٤)

١) $\frac{١}{٢}$ ب ج

٢) $\frac{١}{٢}$ أ^{٢}

٣) $\frac{١}{٢}$ ب ج

٤) $\frac{١}{٢}$ (ب + ج) (ب + ج)

٥) متساوية لذلك

٦) $\frac{١}{٢}$ (ب +ج) (ب + ج) = $\frac{١}{٢}$ (ب ج) + $\frac{١}{٢}$ أ٢ + $\frac{١}{٢}$ ب ج

وبالضرب في ٢ ثم فك الأقواس نتوصل إلى النتيجة التالية:

ب٢ + ج٢ = أ٢

وهو نفس نظرية فيثاغورس : التي تقول أن مساحة المربع المنشأ على الوتر(أ) = مجموع مساحتي المربعين المنشئين على الضلعين الآخرين (ب،ج)

بطاقة التصحيح (٥)

١)

عدد الرجال	عدد السلامات
٢	١
٣	٣
٤	٦
٥	١٠
ن	$\frac{ن}{٢}$ (ن – ١)

٢) ١٠٥

٣) ٨

بطاقة التصحيح (٦)

١) ٣ أشخاص ، بقي معه تفاحة واحدة.

٢) ٤ تفاحات. بما أننا نسير بالحل بطريقة عكسية لذلك نضيف ١ ثم نضاعف الجواب

فنحصل على ٤ (أي ١+١ =٢ ثم ٢في ٢=٤)

٣) ١٠ تفاحات (٤+١ = ٥ ثم ٥ في ٢ = ١٠)

٤) ٢٢ تفاحة (١٠+١ =١١ ثم ١١ في ٢ = ٢٢). وهذا العدد يمثل العدد الأصلي من التفاح قبل البدء بتوزيع التفاح وفق هذه الطريقة.

بطاقة التصحيح (٧)

١) المسافة التي يقطعها الطائر. أما الهدف الفرعي فهو إيجاد الزمن المستغرق.

٢) ١٠ ن

٣) ٨ ن

٤) متساويان

٥) ١٠ ن + ٨ ن = ٩ ومنها ن = نصف ساعة.

٦) بما أن المسافة = السرعة ضرب الزمن لذلك المسافة = ١٥ ضرب $\frac{١}{٢}$ = ٧,٥ كم.

بطاقة التصحيح (٨)

١)

– نعم

– لا

٢) ٥

٣) نزيد من عدد المجلات التي يفترض أنه اشتراها.

٤)

– نعم

– لا

٥) نلاحظ أن المحاولة الثانية أفضل لأنها أقرب إلى تحقيق الشرط الثاني في المسألة وذلك لأن ٢٠ ـــ ٥ = ١٥.

٦)

– نعم

– لا

المصادر والمراجع

- أبو زينة، فريد كامل (٢٠٠٣)، **مناهج الرياضيات المدرسية وتدريسها**، مكتبة الفلاح للنشر والتوزيع، الكويت.
- خوري، أديب، (مترجم)، (١٩٩٦)، **أجمل المعادلات الرياضية**، أكاديميا انترناشيونال، بيروت.
- المغيرة، عبدالله بن عثمان (١٩٨٩)، **طرق تدريس الرياضيات**، عمادة شؤون المكتبات، جامعة الملك سعود، السعودية.
- Bergeson, T. (2000). **Teaching and learning mathematics using research to shift from the "yesterday" mind to the "tomorrow" mind**. WWW.K12.Wa.US.
- Hatfield, M. , Edwards, N., & Bitter. G. (1993). **Mathematics methods for the elementary school**. Allyn and Bacon. Needham Heights: Ma.
- Moses, B. , Bjork, E. , & Goldenberg . (1990). Beyond problem solving: Problem posing. In Thomas J Cooney, & Christian Hirsch, (Eds.), **Teaching and learning mathematics in the** 1990s (Pp. 82-91). NCTM: 1990 Yearbook.
- Musser, G. & Burger, W. (1988). **Mathematics for elementary teachers: A Contemporary approach**. Macmillan Publishing Company: NY.
- NCTM. (2000). **Principles and Standards for school mathematics**. NCTM: Author. - Wilson, J., Fernandez, M., & Hadaway, N. (1993). Mathematical problem solving. In Patricia S. Wilson (Ed.), **Research ideas for the classroom: High school mathematics** (Pp. 57-78).

الملحـــق (١)

صحيفة تقويم ذاتي للمعلم: مهارة تدريس حل المسألة الرياضية

عزيزي المعلم:

الفقرات التالية تتناول بعض الأنشطة المرتبطة بتدريس حل المسألة الرياضية، والمطلوب منك تحديد درجة ممارستك لهذه الأنشطة أثناء تدريس حل المسألة الرياضية.

المجـــــال	درجة ممارسة النشاط		
	منخفضة	متوسطة	مرتفعة
أولاً: من أجل فهم المسألة، أشجع طلابي على:			
١ – قراءة المسألة أكثر من مرة			
٢ – تحديد المعطيات والمطلوب من المسألة			
٣ – التأكد من أن المعطيات كافية لحل المسألة			
٤ – كتابة المسألة بلغته الطالب الخاصة			
٥ – تحديد المعلومات الإضافية التي لا تلزم لحل المسألة			
٦ – التأكد فيما إذا احتوت المسألة على معلومات بينها تناقض			
ثانياً: من اجل اكتشاف خطة الحل، أشجع طلابي على:			
٧ – ربط المسألة الحالية بمسألة سبق حلها			
٨ – اعتبار المسالة بمثابة تحد لهم			
٩ – بناء الثقة بأنفسهم في القدرة على حل المسألة			
١٠ – إعطاء الوقت الكافي للتغلب على المشكلة المرتبط بالمسألة المعطاة			
١١ – عدم التسرع في طلب المساعدة من المدّرس أو رفاق الصف			
١٢ – النظر إلى المسألة بطرق مختلفة			
١٣ – استعراض الاستراتيجيات المختلفة لحل المسألة لاختيار الأنسب			

١٤ – التحدث مع أنفسهم عن المسألة وطرح التساؤلات حولها			
١٥ – إعطاء أنفسهم وقتاً للراحة لتجديد النشاط ثم معاودة المحاولة			
ثالثاً: من أجل تنفيذ خطة الحل، أشجع طلابي على:			

المجـــــــــال	**درجة ممارسة النشاط**		
	منخفضة	**متوسطة**	**مرتفعة**
١٧ – استعراض النظريات (القوانين) اللازمة لحل المسألة			
١٨ – التأكد من صحة كل خطوة من الخطوات التي تم تنفيذها			
١٩ – تفسير كل خطوة من الخطوات التي تم تنفيذها			
٢٠ – تغيير الطريقة التي لا توصل إلى الحل ثم البحث عن طرق أخرى			
٢١ – كتابة الحل بشكل كامل وواضح ليسهل الرجوع إليه في أي وقت			
رابعاً: من أجل تقويم الحل، أشجع طلابي على:			
٢٢ – التأكد من صحة الجواب (النتيجة النهائية)			
٢٣ – التأكد من صحة كل خطوة من خطوات الحل			
٢٤ – التأكد من استخدام كافة المعلومات المعطاة في المسألة			
٢٥ – البحث عن طرق أخرى مناسبة لحل المسألة			
٢٦ – مقارنة الحلول المختلفة لحل المسألة وتبني واحداً منها			
٢٧ – الاستفادة من حل تلك المسألة في حل مسائل أخرى في مواقف مشابهة			

المجـــــــــال	**مدى استخدام الاستراتيجية**		
	مدى قليل	**مدى متوسط**	**مدى كبير**
خامساً: إلى أي مدى يستخدم طلابك الاستراتيجيات التالية:			
١ – استراتيجية استخدام معادلة أو قانون			
٢ – استراتيجية البحث عن نمط			

٣ – استراتيجية عمل قائمة منظمة أو جدول			
٤ – استراتيجية عمل نموذج أو شكل			
٥ – استراتيجية حل مسألة أسهل			
٦ – استراتيجية السير بخطوات الحل بشكل عكسي			
٧ – استراتيجية تحديد أهداف فرعية			
٨ – استراتيجية الحذف أو المحاولة والخطأ			

الملحق (١)

صحيفة تقويم ذاتي للطالب: مهارة حل المسألة الرياضية

عزيزي الطالب:

الفقرات التالية تتناول بعض الأنشطة المرتبطة بحل المسألة الرياضية، والمطلوب منك تحديد ممارستك لهذه الأنشطة أثناء حل المسألة الرياضية سواء في الاختبارات أو في الأعمال الصفية أو الواجبات البيت

المجـــــال	درجة ممارسة النشاط		
	منخفضة	متوسطة	مرتفعة
أولاً: من أجل فهم المسألة، أقوم بما يلي:			
١ – قراءة المسألة أكثر من مرة			
٢ – تحديد المعطيات والمطلوب من المسألة			
٣ – التأكد من أن المعطيات كافية لحل المسألة			
٤ – كتابة المسألة بلغته الطالب الخاصة			
٥ – تحديد المعلومات الإضافية التي لا تلزم لحل المسألة			
٦ – التأكد فيما إذا احتوت المسألة على معلومات بينها تناقض			

ثانياً: من اجل اكتشاف خطة الحل، أقوم بما يلي:			
٧ – ربط المسألة الحالية بمسألة سبق حلها			
٨ – اعتبار المسالة بمثابة تحد لهم			
٩ – بناء الثقة بأنفسهم في القدرة على حل المسألة			
١٠ – إعطاء الوقت الكافي للتغلب على المشكلة المرتبط بالمسألة المعطاة			
١١ – عدم التسرع في طلب المساعدة من المدّرس أو رفاق الصف			
١٢ – النظر إلى المسألة بطرق مختلفة			
١٣ – استعراض الاستراتيجيات المختلفة لحل المسألة لاختيار الأنسب			
١٤ – التحدث مع أنفسهم عن المسألة وطرح التساؤلات حولها			
١٥ – إعطاء أنفسهم وقتاً للراحة لتجديد النشاط ثم معاودة المحاولة			
ثالثاً: من أجل تنفيذ خطة الحل، أقوم بما يلي:			

المجـــــال	**درجة ممارسة النشاط**		
	منخفضة	**متوسطة**	**مرتفعة**
١٧ – استعراض النظريات (القوانين) اللازمة لحل المسألة			
١٨ – التأكد من صحة كل خطوة من الخطوات التي تم تنفيذها			
١٩ – تفسير كل خطوة من الخطوات التي تم تنفيذها			
٢٠ – تغيير الطريقة التي لا توصل إلى الحل ثم البحث عن طرق أخرى			
٢١ – كتابة الحل بشكل كامل وواضح ليسهل الرجوع إليه في أي وقت			
رابعاً: من أجل تقويم الحل، أقوم بما يلي:			
٢٢ – التأكد من صحة الجواب (النتيجة النهائية)			
٢٣ – التأكد من صحة كل خطوة من خطوات الحل			
٢٤ – التأكد من استخدام كافة المعلومات المعطاة في المسألة			
٢٥ – البحث عن طرق أخرى مناسبة لحل المسألة			

٢٦ – مقارنة الحلول المختلفة لحل المسألة وتبني واحداً منها			
٢٧ – الاستفادة من حل تلك المسألة في حل مسائل أخرى في مواقف مشابهة			

المجـــــــال	**مدى استخدام الاستراتيجية**		
	مدى قليل	**مدى متوسط**	**مدى كبير**
خامساً: إلى أي مدى تستخدم الاستراتيجيات التالية:			
١ – استراتيجية استخدام معادلة أو قانون			
٢ – استراتيجية البحث عن نمط			
٣ – استراتيجية عمل قائمة منظمة أو جدول			
٤ – استراتيجية عمل نموذج أو شكل			
٥ – استراتيجية حل مسألة أسهل			
٦ – استراتيجية السير بخطوات الحل بشكل عكسي			
٧ – استراتيجية تحديد أهداف فرعية			
٨ – استراتيجية الحذف أو المحاولة والخطأ			

الوحـــدة الخامســة

مبادئ ومعايير ومحتوى رياضيات المرحلة الابتدائية

الوحـــدة الخامسـة

محتويات الوحدة الدراسية

الأهـداف التعليمية للوحدة الدراسية

الأهداف التعليمية للوحدة الدراسية

يتوقع من الطالب بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة أن يصبح قادرا على أن:

(١) يتعرف التوجهات المعاصرة في معايير ومبادئ ومحتوى رياضيات المرحلة الابتدائية.

(٢) يتعرف مبادئ رياضيات المدرسة الابتدائية.

(٣) يتعرف معايير المحتوى في رياضيات المدرسة الابتدائية.

(٤) يتعرف معايير العمليات في رياضيات المدرسة الابتدائية.

(٥) يحدد المعايير في رياضيات المرحلة الابتدائية وفقا لمراحل عمرية مختلفة فيها.

(٦) يحدد أهداف معايير المحتوى في رياضيات المرحلة الابتدائية وفقا لمراحلها العمرية المختلفة.

(٧) يحدد أهداف معايير العمليات في رياضيات المرحلة الابتدائية وفقا لمراحلها العمرية المختلفة.

(٨) يتعرف محتوى رياضيات المدرسة الابتدائية.

(٩) يصف ويوضح ويحلل محتوى رياضيات المدرسة الابتدائية

مقدمـة

نتناول في هذه الوحدة مبادئ ومعايير رياضيات المدرسة الابتدائية مستفيدون في ذلك مما توصل اليه المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات بالولايات المتحدة الأمريكية (NCTM)، حيث نعرض الى مبادئ ستة هي المساواة، المنهج، التقنية، التدريس، التعلم، التقويم. ثم انتقلنا الى معايير محتوى رياضيات المرحلة الابتدائية موزعة على عناوين رئيسة تلك هي: الأعداد والعمليات عليها، الجبر، الهندسة، القياس، تحليل البيانات والاحتمالات.

كما تناولنا معايير العمليات الرياضية موزعة على عناوين رئيسة هي: حل المشكلات، التبرير والبرهان، التواصل، التداخل، التمثيل.

وكان من البديهي بعد عرض تلك المعايير والمبادئ أن نضع نموذجا مقترحا لما ينبغي أن تكون عليه مصفوفة المدى والتتابع لمحتوى منهج الرياضيات بالمرحلة الابتدائية.

ويمكن للطالب اتقان المعلومات الواردة في هذه الوحدة من خلال حله للأنشطة وأسئلة التقويم الذاتي المقترحة.

مبادئ و معايير الرياضيات المدرسية

لقد أصدر المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات في الولايات المتحدة الأمريكية (NCTM) عام ٢٠٠٠ وثيقة مبادئ ومعايير للرياضيات المدرسية .نقدم فيما يلي موجزا لأهم البنود التي شملتها هذه الوثيقة .

هناك ستة مبادئ و خمسة معايير للمحتوى و خمسة معايير للعمليات في الرياضيات المدرسية .و تشكل المبادئ مع المعايير رؤية مشتركة ترشد التربويين في جهودهم نحو تطوير تعليم الرياضيات في المدارس.

مبادئ الرياضيات المدرسية Principles for School Mathematics

المبادئ هي عبارات محددة تعكس القواعد الأساسية و الجوهرية لتعليم الرياضيات ذات النوعية العالية .إن القرارات التربوية التي يتخذها التربويون تكون ذات أهمية بالغة للطلاب والمجتمع. وتقدم مبادئ الرياضيات المدرسية دليل مرجعي في صناعة هذه القرارات.

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر (K-12) من :

مبدأ المساواة The Equity Principle

يتطلب مبدأ المساواة في الرياضيات توقعات عالية ودعم قوي لجميع الطلاب من حيث توفير الفرص التعليمية لجميع الطلاب بغض النظر عن خصائصهم الشخصية وخلفياتهم لدراسة الرياضيات و تعلمها . وتقوم المساواة على الأسس التالية :

(١) تتطلب المساواة توقعات عالية و فرصا تعليمية للجميع .

(٢) تتطلب المساواة استيعاب الفروق الفردية بين الطلبة لمساعدة الجميع على تعلم الرياضيات .

(٣) تتطلب المساواة توفير المصادر و الدعم للجميع :معلمين و طلاب .

مبدأ المنهج The Curriculum Principle

يعتبر المنهج أكثر من مجرد تجميع للأنشطة و يقوم منهج الرياضيات على الأسس التالية :

(١) أن يكون متناسقاً ويركز على الرياضيات المهمة .

(٢) أن يكون مترابطاً باتساق عبر الصفوف الدراسية.

مبدأ التعليم The Teaching Principle

يحتاج تعليم الرياضيات الفعال فهم ما يعرفه الطلاب وما يحتاجون تعلمه ثم تحديهم ودعمهم لتعلمه جيداً. و يقوم تعليم الرياضيات على الأسس التالية :

(١) يتطلب التدريس الفعال معرفة و فهم الرياضيات و فهم الطلبة كمتعلمين إضافة إلى المعرفة و التمكن من استراتيجيات التدريس المناسبة .

(٢) يتطلب التدريس الفعال بيئة صفية تثير التحدي و توفر المساعدة و الدعم .

(٣) يتطلب التدريس الفعال السعي المستمر نحو التحسين .

مبدأ التعلم The Learning Principle

يجب أن يتعلم الطلاب الرياضيات مع الفهم والبناء الفعال للمعلومات الجديدة من المعلومات السابقة. و يقوم تعلم الرياضيات على الأسس التالية :

(١) تعلم الرياضيات المقرون بالفهم ضروري و أساسي .

(١) يستطيع الطلاب تعلم الرياضيات وفهمها .

مبدأ التقييم The Assessment Principle

لابد أن يدعم التقييم التعلم للرياضيات المهمة ويجهز المعلومات المفيدة لكل من المعلمين والطلاب. و يقوم تقييم تعلم الرياضيات على الأسس التالية :

(١) التقييم الجيد يدعم التعلم الجيد للطلاب .

(٢) التقييم أداة مهمة لاتخاذ القرارات المهمة المتعلقة بالتدريس .

مبدأ التقنية The Technology Principle

تعتبر التقنية عنصراً أساسياً في تعليم وتعلم الرياضيات؛ فهي تؤثر في الرياضيات التي تعلم وتحسن تعلم الطلاب. وتقوم التقنية في تعلم الرياضيات على الأسس التالية :

١) التكنولوجيا تدعم تعلم الطلاب .

٢) التكنولوجيا تدعم التعليم الفعال للرياضيات .

٣) التكنولوجيا لها أثر في نوعية الرياضيات التي يجري تدريسها .

معايير الرياضيات المدرسية Standards for School Mathematics

تصف معايير الرياضيات المدرسية المفاهيم و التعميمات والمعلومات والمهارات الرياضية التي يجب أن يكتسبها الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر. و يتم تقسيم المعايير إلي أربعة مراحل : الروضة إلى الصف الثاني، والصفوف ٣–٥، والصفوف ٦–٨، والصفوف ٩–١٢ .

وسوف نقتصر في العرض التالي علي تلك المراحل المتعلقة بشكل رئيسي بتعليم الرياضيات في المرحلة الابتدائية موضوع كتابنا الحالي أي على المعايير حتى الخامس الابتدائي .

معايير المحتوى الرياضي Standards for Mathematics Content

جاءت موضوعات المحتوى الرياضي في خمسة مجالات هي :

(١) الأعداد و العمليات عليها .

(٢) الجبر .

(٣) الهندسة .

(٤) القياس .

(٥) تحليل البيانات و الاحتمالات .

وفيما يلي وصف مختصر لكل معيار من هذه المعايير

١ - الأعداد والعمليات عليها Number and Operations

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- إدراك مفاهيم الأعداد، وطريقة تمثيل الأعداد، والعلاقات بين الأعداد، والأنظمة العددية.
- فهم معنى العمليات الحسابية وكيف ترتبط ببعضها البعض.
- اكتساب المهارة في إجراء الحسابات بدقة وبراعة، وعمل تقديرات معقولة.

الأهداف المرتبطة بمعايير الأعداد والعمليات عليها

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة –الثاني أن:

- يعد مع التعرف ويستنتج «كم» في مجموعات الأشياء.
- يستخدم نماذج متعددة لتطوير الفهم المبدئي للقيمة المكانية للرقم في العدد ونظام العد العشري.
- ينمي فهم مواقع وكميات الأعداد الطبيعية وتمثيلها واستخدامها بطرق مرنة تشمل

علاقتها ببعضها البعض وتوزيع وتجميع الأعداد.

- يربط مسمى الأعداد ورموزها بالكميات التي تمثلها مستخدماً نماذج محسوسة مختلفة وتمثيلات.
- يفهم المعاني المختلفة للجمع والطرح للأعداد الأولية والعلاقة بين العمليتين.
- يفهم أثر جمع وطرح الأعداد الطبيعية.
- فهم المواقف التي تستلزم الضرب والقسمة مثل المجموعات المتساوية من الأشياء والتوزيع بالتساوي.
- يطور ويستخدم استراتيجيات لحساب الأعداد الطبيعية مع التركيز على الجمع والطرح.
- يطور الدقة والبراعة مع عمليات جمع عددين من رقم واحد وعمليات الطرح المقابلة لها.
- يستخدم طرق وأدوات مختلفة للحساب تتضمن الأشياء والحساب الذهني وحساب الورقة والقلم والأدوات الحاسوبية.

يجب على الطالب في الصفوف من ٣ ٥– أن:

- يفهم بنية القيمة المكانية لنظام العد العشري ويستطيع أن يمثل ويقارن الأعداد الطبيعية و الأعداد العشرية.
- يتعرف التمثيلات المتكافئة لنفس العدد وينتجها بوساطة تجميع وتوزيع الأعداد.
- يطور فهم الكسور كأجزاء من وحدات كاملة، وأجزاء من مجموعة، وكمواقع على خطوط الأعداد، وكحاصل قسمة للأعداد الطبيعية.
- يستخدم النماذج، والعلامات، والأشكال المتكافئة للحكم على الكسور.
- يتعرف وينتج أشكال متكافئة للكسور الاعتيادية، الكسور العشرية، والنسب المئوية.
- يستكشف الأعداد الأقل من صفر بتمديد خط الأعداد ومن خلال تطبيقات مألوفة.
- يصف أصناف الأعداد طبقاً للسمات مثل طبيعة عواملها.
- يفهم معاني مختلفة للضرب والقسمة.
- يفهم تأثيرات ضرب وقسمة الأعداد الطبيعية.
- يعين ويستخدم العلاقات بين العمليات مثل القسمة كمعكوس للضرب لحل المشكلات.
- يفهم ويستخدم خصائص العمليات مثل توزيع الضرب على الجمع.
- يطور الدقة والبراعة مع ضرب الأعداد المكونة من رقم واحد والقسمة المقابلة لها واستخدامها بالحساب الذهني للمسائل ذات العلاقة مثل ٢٠ * ٣٠.

- يطور الدقة والبراعة في جمع وطرح وضرب وقسمة الأعداد الطبيعية.
- يطور ويستخدم استراتجيات لتقدير النتائج للعمليات الحسابية على الأعداد الكلية ويحكم على معقولية النتائج.
- يطور ويستخدم استراتجيات لتقدير الحسابات التي تحتوي على كسور اعتيادية وعشرية في مواقف ذات علاقة بخبرات الطلاب.
- يستخدم النماذج البصرية والعلامات والأشكال المتكافئة ليجمع ويطرح الكسور الاعتيادية والعشرية.
- يختار طرق وأدوات مناسبة لإجراء العمليات الحسابية من بين الحسابات الذهنية والتقديرات والآلات الحاسوبية واستخدام الورقة والقلم طبقاً لبيئة وطبيعة الحسابات ويستخدم الطريقة والأداة المختارة.

٢ - الجبر Algebra

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- إدراك الأنماط والعلاقات والدوال.
- تمثيل و تحليل المواقف الرياضية والبني الجبرية باستخدام الرموز الجبرية.
- استخدام النماذج الرياضية لتمثيل وفهم العلاقات الكمية.
- تحليل التغير في سياقات مختلفة.

الأهداف المرتبطة بمعايير الجبر :

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة –الثاني أن:

- ينظم ويصنف ويرتب الأشياء بالنسبة للحجم والعدد والخصائص الأخرى.
- يتعرف ويصف ويكمل الأنماط مثل متوالية الأصوات والأشكال أو الأنماط العددية البسيطة ويحول من تمثيل إلى آخر.
- يحلل كيف يمكن توليد كل من أنماط التكرار والزيادة.
- يوضح المبادئ العامة والخواص للعلميات مثل التجميع مستخدماً أعداداً محددة.
- يستخدم تمثيلات محسوسة ومصورة ولفظية لتطوير فهم الأشكال الرمزية المبتكرة.
- ينمذج مواقف تشمل الجمع والطرح للأعداد الكلية مستخدماً الأشياء والصور والرموز.
- يصف التغير النوعي مثل نمو طول الطالب.
- يصف التغير العددي مثل نمو الطالب بمقدار ٦ سم في سنة واحدة.

يجب على الطالب في الصفوف من ٣ ٥– أن:

- يصف ويكون تعميمات عن الأنماط الهندسية والعددية.
- يمثل ويحلل الأنماط والدوال مستخدماً الكلمات والجداول والرسوم.
- يميز الخصائص مثل الإبدال والتجميع والتوزيع ويستخدمها في العمليات الحسابية مع الأعداد الطبيعية.
- يمثل فكرة المتغير كمجهول القيمة مستخدماً الحروف أو الرموز الجبرية.
- يعبر عن العلاقات الرياضية مستخدماً المعادلات.
- ينمذج مواقف المشكلات الرياضية بوساطة الأشياء ويستخدم التمثيلات مثل الرسوم والجداول والمعادلات ليستخلص النتائج.
- يستقصي كيف أن التغير في أحد المتغيرات يستلزم التغير في المتغير الثاني.
- يميز ويصف المواقف الرياضية باستخدام الثوابت أو المتغيرات والمقارنة بينها.

٣ - الهندسة Geometry

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- تحليل صفات وخصائص الأشكال الهندسية ذات البعدين و ثلاثية الأبعاد، وينمي الحجج الرياضية عن العلاقات الهندسية.
- تعيين الإحداثيات، ووصف العلاقات المكانية باستخدام الهندسة الإحداثية وغيرها من أنظمة التمثيل الأخرى .
- تطبيق التحويلات والتماثلات لتحليل المواقف الرياضية.
- استخدام التمثيل البصري والتبرير الفراغي والنمذجة الهندسية لحل المشكلات.

الأهداف المرتبطة بمعايير الهندسة :

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة –الثاني أن:

- يتعرف ويسمي ويبني ويرسم ويقارن ويصنف الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يصف خصائص وأجزاء الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يستقصي ويتنبأ بنتائج ضم وتجزيء الأشكال ثنائية وثلاثية الأبعاد.
- يصف ويسمي ويفسر الأماكن النسبية في الفراغ ويطبق الأفكار عن المكان النسبي (فوق، تحت، قريب، بعيد، بين).
- يصف ويسمي ويفسر الاتجاه والمسافة في الفراغ ويطبق الأفكار عن الاتجاه والمسافة (يمين، يسار، المسافة والقياس).

- يجد ويسمي الأماكن مستخدماً العلاقات البسيطة مثل «قريب من» وفي الأنظمة الإحداثية مثل الخارطة.
- يتعرف ويطبق الإزاحة والالتفاف والانعكاس.
- يتعرف وينتج أشكالاً لها تناظرات.
- ينتج صوراً ذهنية للأشكال الهندسية مستخدماً الذاكرة الفراغية والتمثيل البصري الفراغي.
- يتعرف ويمثل الأشكال من وجهات مختلفة.
- يرجع الأفكار في الهندسة إلى الأفكار في الأعداد والقياس.
- يتعرف الأشكال والبني في البيئة ويحدد مواقعها.

يجب على الطالب في الصفوف من ٣ – ٥ أن:

- يعين ويقارن ويحلل خصائص الأشكال ذات البعدين وثلاثية الأبعاد وينمي مجموعة مفردات يصف بها تلك الخصائص.
- يصنف الأشكال ذات البعدين وثلاثية الأبعاد طبقاً لخصائصها وينمي تعريفات لأصناف الأشكال مثل المثلثات والأهرامات.
- يستقصي ويصف ويبرر نتائج تقسيم وجمع وتحويل الأشكال.
- يستكشف التطابق والتشابه.
- يكون ويختبر التخمينات (الحدس الرياضي) عن الخصائص الهندسية والعلاقات وينمي حجج منطقية لتبرير النتائج.
- يصف الموقع والحركة مستخدماً اللغة العادية و المفردات الهندسية.
- ينشئ ويستخدم الأنظمة الإحداثية لتحديد المواقع ويصف المسارات.
- يوجد المسافة بين النقط على الخطوط الأفقية والرأسية للنظام الإحداثي.
- يتنبأ ويصف النتائج للإزاحة والانعكاس والتدوير للأشكال ذات البعدين.
- يصف الحركة أو سلسلة الحركات التي سوف توضح أن الشكلين متطابقان.
- يعين ويصف خط التماثل والدوران في الأشكال والتصميمات ذات البعدين وثلاثية الأبعاد.
- يبني ويرسم الأشياء الهندسية.
- يكون ويصف تصورات ذهنية للأشياء والأنماط والمسارات.
- يعين ويبني الشيء ثلاثي الأبعاد من تمثيلات ذات بعدين لذلك الشيء.
- يعين ويبني تمثيلاً ذا بعدين لشيء ثلاثي الأبعاد.
- يستخدم نموذج هندسي لحل المشكلات في مجالات رياضية أخرى مثل الأعداد والقياس.

- يتعرف الأفكار الهندسية والعلاقات ويطبقها في مواضيع أخرى وفي حل المشكلات التي تظهر في الصف الدراسي أو الحياة اليومية.

٤ - القياس Measurement

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- ادراك قابلية الأشياء للقياس وإدراك الوحدات، والنظم، وإجراءات القياس.
- استخدام التقنيات المناسبة، والأدوات والصيغ لتحديد القياسات.

الأهداف المرتبطة بمعايير القياس :

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة –الثاني أن:

- يتعرف خصائص الطول والحجم والوزن والمساحة والزمن.
- يقارن ويرتب الأشياء طبقاً لهذه الخصائص.
- يفهم كيف يقيس مستخدماً الوحدات القياسية وغير القياسية.
- يختار الوحدة والأداة المناسبة للخاصية المراد قياسها.
- يقيس بنسخ مكررة لوحدات لها نفس الحجم مثل قصاصات الورق المرصوصة بنهاية بعضها البعض.
- يستخدم تكراراً لوحدة واحدة لقياس شيء أكبر من الوحدة نفسها على سبيل المثال قياس طول غرفة بعصا طولها متر واحد.
- يستخدم أدوات القياس.
- يطور مرجعية عامة للقياسات لعمل المقارنات والتقديرات.

يجب على الطالب في الصفوف ٣ ٥– أن:

- يفهم السمات مثل الطول والمساحة والوزن والحجم وانفراج الزاوية ويختار نوع الوحدة المناسبة لقياس كل سمة.
- يفهم الحاجة للقياس باستخدام وحدات معيارية ويألف التعامل مع الوحدات المعيارية في الأنظمة التقليدية والمترية.
- يتمم تحويلات بسيطة لوحدة القياس مثل التحويل من السنتيمترات إلى الأمتار ضمن نظام القياس.
- يفهم أن القياسات تقريبية ويستنتج كيف أن الفروق في الوحدات يؤثر على دقة القياس.
- يكتشف ماذا يحدث لقياسات الشكل ذي البعدين مثل محيطه ومساحته عندما يتم تغيير الشكل بطريقة ما.

- يطور استراتيجيات لتقدير المحيطات والمساحات والحجوم للأشكال غير المنتظمة.
- يختار ويطبق وحدات معيارية مناسبة وأدوات لقياس الطول والمساحة والحجم والوزن والوقت والحرارة والزاوية.
- يختار ويستخدم علامات لتقدير القياسات.
- يطور ويفهم ويستخدم صيغاً لإيجاد مساحة المستطيلات والمثلثات ومتوازيات لأضلاع.
- يطور استراتيجيات لحساب المساحة السطحية والحجم لمتوازي المستطيلات.

٥ - تحليل البيانات والاحتمال الرياضي Data analysis and Probability

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- صياغة أسئلة يمكن تقديمها بالبيانات، وجمع وتنظيم وعرض البيانات وثيقة الصلة بالإجابة عن تلك الأسئلة .
- اختيار واستخدام الطرق الإحصائية المناسبة لتحليل البيانات.
- تطوير و تقويم الاستدلالات والتنبؤات المبنية على البيانات.
- فهم وتطبيق المفاهيم و المبادئ الأساسية للاحتمالات الرياضية.

الأهداف المرتبطة بمعايير تحليل البيانات و الاحتمال الرياضي :

يجب على الطالب في الصفوف من الروضة –الثاني أن:

- يطرح أسئلة ويجمع بيانات عن نفسه وزملائه والمحيطين به.
- يصنف ويبوب الأشياء طبقاً لخصائصها وينظم البيانات عن الأشياء.
- يمثل البيانات مستخدماً أشياء محسوسة وصوراً ورسومات.
- يصف أجزاء البيانات ومجموعة البيانات ككل متكامل ليحدد ما تمثله البيانات.
- يناقش الأحداث المتصلة بخبرات الطلاب كأحداث متوقعة أو غير متوقعة.

يجب على الطالب في الصف ٣ ٥– أن:

- يصمم استقصاءات لتقديم سؤال يأخذ بعين الاعتبار كيف أن طرق جمع البيانات تؤثر على طبيعة مجموعة البيانات.
- يجمع البيانات مستخدماً الملاحظة والمسح والتجربة.
- يمثل البيانات مستخدماً الجداول والرسوم مثل خط الانتشار والأعمدة البيانية والخطوط البيانية.

- يتعرف الاختلافات في تمثيل البيانات الفئوية والعددية.
- يصف شكل وأهمية خصائص مجموعة من البيانات ويقارن مجموعات البيانات المترابطة مع التركيز على كيفية توزعها.
- يستخدم مقاييس النزعة المركزية مركزاً على الوسيط ويستنتج ماذا يظهر أو لا يظهر عن مجموعة البيانات.
- يقارن تمثيلات مختلفة لنفس البيانات ويقوم درجة توضيح كل تمثيل للمظاهر المهمة للبيانات.
- يقترح ويبرر النتائج والتنبؤات المبنية على البيانات ويصمم دراسات لاستقصاءات أقوى للنتائج والتنبؤات.
- يصف الأحداث كمتوقعة أو غير متوقعة الحدوث ويناقش درجة الاحتمال مستخدماً الكلمات «أكيد، متساوي الاحتمال، مستحيل».
- يتنبأ باحتمال النتائج للتجارب البسيطة ويختبر التنبؤات.
- يفهم أن قياس الاحتمال للحدث يمكن تمثيله بوساطة الأعداد من الصفر إلى الواحد.

معايير العمليات الرياضية
Standards for Mathematics Processes

١ - حل المشكلات Problem Solving

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- بناء معارف رياضية جديدة من خلال حل المشكلات.
- حل المشكلات التي تظهر في الرياضيات والسياقات الأخرى.
- استخدام وتكييف العديد من الاستراتيجيات المناسبة لحل المشكلات.
- تأمل وملاحظة إجراءات حل المشكلات الرياضية .

٢ - التبرير والبرهان Reasoning and Proof

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- إدراك أهمية التبرير والتفكير والبرهان كمظاهر أصيلة للرياضيات.
- بناء و استقصاء التخمينات (الحدس) الرياضية والتحقق منها .

- تطوير و تقويم الحجج والبراهين الرياضية.
- اختيار و استخدام أنواعاً مختلفة من التبريرات وطرق البرهان.

٣ - التواصل Communication

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- تنظيم وتعزيز تفكيرهم الرياضي من خلال التواصل.
- نقل تفكيرهم الرياضي مترابطاً وواضحاً إلى أقرانهم ومعلميهم والآخرين.
- تحليل وتقويم التفكير الرياضي للآخرين واستراتيجياتهم .
- استخدام لغة الرياضيات للتعبير عن الأفكار الرياضية بدقة.

٤ - التداخل Connection٤

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- تعرف واستخدام التداخل خلال الأفكار الرياضية.
- فهم كيفية أن الأفكار الرياضية متداخلة ومبنية فوق بعضها البعض لتنتج بناء واحداً مترابطاً.
- تعرف وتطبق الرياضيات في سياقات خارج النطاق الرياضي .

٥ - التمثيل Representation

يجب أن تمكن البرامج التعليمية في الرياضيات جميع الطلاب من الروضة إلى الصف الثاني عشر(K-12) من:

- بناء واستخدام تمثيلات لتنظيم وتسجيل وتواصل الأفكار الرياضية.
- اختيار وتطبيق وترجمة التمثيلات الرياضية لحل المشكلات.
- استخدام التمثيلات لنمذجة وتفسير الظواهر الطبيعية والاجتماعية والرياضية.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف

المحور والموضوع	الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
الأعداد والعمليات عليها: الأعداد	**الأعداد إلى ١٠٠** **الأعداد إلى ١٢** – استكشاف الأعداد إلى ١٠. – تمييز وقراءة وكتابة الأعداد إلى ١٠. – المقارنة بين عددين كلاهما أصغر من ١٠. – ترتيب الأعداد إلى ١٠. – استكشاف الأعداد ١١، ١٢. **الحقائق إلى ١٢** – القيام بالعد التصاعدي. – القيام بالعد التنازلي. – استخدام خط الأعداد في عمليتي العد التصاعدي والتنازلي. الأعداد إلى ٦٠ وأنماط العد – تميز الأعداد إلى ١٩. – تميز العشرات. – تمييز الأعداد إلى ٦٠. – استكشاف التقدير. – القيام بالعد التجاوزي. **القيمة المكانية** – استكشاف الآحاد والعشرات. – تمييز الآحاد والعشرات. – ترتيب الأعداد إلى ١٠٠. – تحديد التسلسل والترتيب.	**الأعداد إلى ١٠٠٠** **القيمة المكانية والأنماط إلى ١٠٠** – كتابة الأعداد. – تسمية الأعداد. – تمييز الـ ١٠٠. – تمييز لوحة المائة. – تمييز مفاهيم (قبل، بعد، بين). – مقارنة الأعداد. – تمييز الأعداد الفردية والزوجية. – تمييز الأعداد الترتيبية. **الأعداد إلى ١٠٠٠** – تمييز المئات. – قراءة وكتابة عدد من ٣ أرقام. – مقارنة الأعداد. – ترتيب الأعداد. **القيمة المكانية** – القيام بالعد والمقارنة. – تمييز أكثر وأقل. – القيام بالعد التجاوزي. – القيام بالعد التصاعدي. – القيام بالعد التنازلي. – القيام بتشكيل الأعداد.	**الأعداد إلى ١٠٠,٠٠٠** **القيمة المكانية والأعداد حتى مئات الألوف** – تمييز القيمة المكانية إلى المئات. – استكشاف العلاقة بين القيم المكانية. – تمييز القيمة المكانية إلى الألوف. – تمييز القيمة المكانية إلى مئات الألوف. – مقارنة الأعداد. – ترتيب الأعداد. – التقريب إلى العشرات. – التقريب إلى المئات. – تمييز الأعداد الترتيبية.

الوحدة الخامسة

الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
القيمة المكانية والأعداد إلى المليون – تمييز القيمة المكانية. – تمييز الألوف والملايين.	**الأعداد إلى البلايين** – تمييز الأعداد إلى البلايين. – تمييز القيمة المكانية إلى البلايين. – تحديد العلاقة بين القيم المكانية. – مقارنة وترتيب الأعداد إلى بلايين. – القيام بالتقريب على الأعداد إلى البلايين.	– ضرب وقسمة الأعداد. – التحليل إلى عوامل أولية. – حساب المضاعف المشترك البسيط. – تمييز الكسور والكسور البسيطة والكسور المركبة والأعداد الكسرية. – تقريب الكسور العشرية. – مقارنة وترتيب الكسور العشرية. – التحويل من وإلى الكسور العشرية والكسور الاعتيادية.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس

المحور والموضوع	الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
الأعداد والعمليات عليها: الجمع والطرح	**الاستعداد لعمليتي الجمع والطرح** – تحديد أسماء الأعداد إلى ١٠. – تحديد مفهومي أكثر وأقل. – تميز الأعداد الزوجية والفردية. – تحديد مكملات العدد إلى ١٠. مفهوما الجمع والطرح – استكشاف الجمع. – جمع عددين إلى ١٢. – القيام بالجمع الرأسي. – استكشاف الطرح. – القيام بالطرح الرأسي. – استنتاج العلاقة بين الجمع والطرح. – اختيار العملية المناسبة. – طرح العدد من عدد مساوٍ له. – كتابة جمل عددية. عمليات وحقائق – استخدام الأضعاف عند الجمع والطرح. – إقامة العلاقة بين الجمع والطرح. – تمييز عائلات الحقائق. عمليات وحقائق إلى ١٨ – القيام بعمليات واستخدام الحقائق إلى ١٨. – تمييز الأضعاف إلى ١٨. – جمع ثلاثة أعداد. – توظيف العشرة في جمع ٧، ٨، ٩. – استخدام الأضعاف في الطرح. – تمييز حقائق الطرح إلى ١٨. – تمييز عائلات الحقائق. جمع وطرح أعداد ذات رقمين – جمع العشرات. – جمع الآحاد والعشرات. – التجميع في عملية الجمع. – طرح العشرات. – طرح الآحاد والعشرات. – اختيار العملية المناسبة	**عمليات وحقائق** – جمع الصفر. – طرح الصفر. – تمييز صلة الجمع بالطرح. – تمييز الأضعاف. – تشكيل العشرة. – استخدام الأضعاف في عملية الطرح. – استخدام حقائق الجمع والطرح. – استكشاف عائلات الحقائق. – استخدام عائلات الحقائق. – استخدام الجمع للتحقق من صحة الطرح. – حساب العدد المفقود في عملية الجمع. – تمييز مجاميع كبيرة. **جمع وطرح عددين من رقمين** **- جمع عشرات.** – استخدام لوحة المئة – التنبؤ قبل حل المسائل. – الجمع مع أو بدون إعادة تسمية. – جمع ثلاثة أعداد. – طرح العشرات. – اختيار طريقة الحساب. – طرح عددين من رقمين مع أو بدون إعادة تسمية. – استخدام الجمع للتأكد من صحة الطرح. – تمييز المسائل ذات المعلومات الزائدة. – جمع أعداد ذات ثلاثة أرقام. – طرح أعداد ذات ثلاثة أرقام.	**الجمع والطرح والأنماط** – جمع عددين من أربعة أرقام. – جمع الصفوف رأسياً. – التقريب إلى أول رقم في أقصى يسار رمز العدد – تقدير ناتج الطرح. – إجراء الطرح على لوحة المئة. – القيام بطرح أعداد كبيرة حتى أربعة أرقام.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
جمع وطرح الأعداد. – تحديد مفهوم عمليتي الجمع والطرح. – القيام بعمليات الجمع والطرح. – جمع الصفوف الرأسية.	**جمع وطرح الأعداد** – تقدير حاصل الجمع وحاصل الطرح. – جمع وطرح الأعداد.	– جمع وطرح الكسور ذات المقامات المختلفة. – جمع وطرح الأعداد الكسرية. – جمع وطرح الكسور العشرية.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس			
المحور والموضوع	الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
الأعداد والعمليات عليها: الضرب والقسمة		مفاهيم الضرب والقسمة – القيام بالجمع المتكرر. – القيام بالطرح المتكرر. – تشكيل منظومات. – اختيار الخطة. – اختيار العملية المناسبة.	**حقائق ومفاهيم الضرب** – تحديد مفهوم عملية الضرب. – كتابة جملة الضرب. – الضرب في الأعداد ٠، ١، ٢، ...، ٩. – تمييز المعلومات الناقصة والزائدة عند حل المسائل. **حقائق ومفاهيم القسمة** – تحديد مفهوم عملية القسمة على أنها توزيع بالتساوي. – تحديد مفهوم القسمة على أنها طرح متكرر. – تحديد العلاقة بين الضرب والقسمة. الضرب والقسمة – استكشاف ضرب العشرات. – تقدير حاصل الضرب. – ضرب أعداد من رقمين وثلاثة أرقام. – تقدير ناتج القسمة. – القسمة على الأعداد من ٢ إلى ٩. – القسمة على مقسوم عليه ذو رقم واحد لا يساوي الصفر. – القسمة مع باقي.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
مفاهيم وحقائق عملية القسمة – تحديد مفهوم عملية القسمة. – القسمة على الأعداد من ٢ إلى ٩ **الضرب في عدد ذي رقم واحد** – تقدير ناتج الضرب. – استكشاف الضرب. – القيام بضرب عدد مكون من رقمين. – القيام بضرب عدد مكون من ثلاثة أرقام. – القيام بضرب ثلاثة أعداد. **الضرب في عدد مكون من رقمين** – استكشاف الأنماط في عملية الضرب. – تقدير ناتج الضرب. – تقدير نواتج ضرب كبيرة. **القسمة على مقسوم عليه ذي رقم واحد** – استكشاف الأنماط في عملية القسمة. – استكشاف القسمة مع باقي. – القيام بقسمة مقسوم ذي رقمين. – تمييز الصفر في ناتج القسمة **القسمة على عدد ذي رقمين** – القسمة على عدد من رقمين	**ضرب الأعداد** – تقدير ناتج الضرب. – ضرب الأعداد. – تمييز خاصية التوزيع. – تمييز ترتيب العمليات. – تمييز دور الصفر عند الضرب. **القسمة على عدد ذي رقم واحد** – استكشاف عملية القسمة. – تمييز الصفر في ناتج القسمة. – استكشاف العوامل وقابلية القسمة. **القسمة على عدد ذي رقمين** – القسمة على عدد من رقمين. – اختيار العملية المناسبة.	– ضرب وقسمة الكسور. – ضرب وقسمة الكسور العشرية.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس			
المحور والموضوع	الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
الكســـور والنســـبة والتنـــاســب	– تحديد الحصص المتساوية. – تمييز الأنصاف والأرباع.	– تمييز الأنصاف والأرباع والأثلاث. – تقدير أجزاء الوحدة. – حساب كسر مجموعة.	– تمييز الكسور. – تمييز الأجزاء المتساوية. – تمييز الكسور المتكافئة. – مقارنة الكسور وترتيبها. – تحديد كسر المجموعة. – تحديد كسر عدد. – تمييز الأعداد الكسرية.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
الكسور – استكشاف الكسور. – استكشاف الأعداد الكسرية. – استكشاف الكسور المتكافئة. – قراءة وتسمية الكسور المتكافئة. – مقارنة وترتيب الكسور. – استكشاف كسر مجموعة. – جمع الكسور متحدة المقام. – طرح الكسور متحدة المقام. **الكسور العشرية** – تمييز الكسور العشرية. – قراءة وكتابة الكسور العشرية. – مقارنة وترتيب الكسور العشرية. – تقريب الكسور العشرية. – جمع وطرح الكسور العشرية.	**الكسور والأعداد الكسرية** – تمييز الأعداد الأولية وغير الأولية. – تمييز الكل والأجزاء. – استكشاف الكسور المتكافئة. – تمييز الأنماط في الكسور. – حساب القاسم المشترك الأعظم. – تمييز الشكل المختزل للكسر. – مقارنة وترتيب الكسور. – تمييز الأعداد الكسرية. – مقارنة وترتيب الأعداد الكسرية. – تمييز النسبة المئوية. – ربط الكسور العشرية بالكسور وبالنسبة المئوية. – جمع وطرح الكسور متحدة المقام. – تحديد المضاعف المشترك البسيط. – جمع وطرح الكسور مختلفة المقام. – جمع وطرح أعداد كسرية. **الكسور العشرية** – تمييز الكسور العشرية إلى الأجزاء من مائة. – تمييز الكسور العشرية المتكافئة. – تعيين مواقع الكسور العشرية على خط الأعداد. – مقارنة وترتيب الكسور العشرية. – تقريب الكسور العشرية. – جمع وطرح الكسور العشرية.	– تمييز النسبة والمعدل. – النسب المتكافئة. – تمييز التناسب. – استعمال خواص التناسب لحل المسائل. – تمييز النسبة المئوية. – ربط الكسور بالكسور العشرية وبالنسب المئوية. – حساب النسب المئوية بعدة طرق. – استكشاف الخرائط والرسوم البيانية. – تطبيقات حياتية (مقياس الرسم).

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس			
المحور والموضوع	**الصف الاول**	**الصف الثاني**	**الصف الثالث**
الجبر	– تصنيف وترتيب أشياء وفق خاصية معينة. – استكشاف واستكمال أنماط. – تنظيم اللوائح. – استكشاف الإبدال والتجميع للجمع. – حل جمل مفتوحة.	– استكشاف واستكمال أنماط. – استخدام الإبدال والتجميع للجمع. – حل جمل مفتوحة.	– استكشاف الأنماط الهندسية والعددية. – استخدام خاصية الإبدال للضرب. – حل جمل مفتوحة.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
– استكشاف الأنماط الهندسية والعددية. – استخدام خاصيتي الإبدال والتجميع للضرب. – حل جملة مفتوحة.	– تمثيل وتحليل الأنماط والدوال. – استخدام المتغيرات لتمثيل الأعداد. – تعرف المعادلة. – حل المعادلة. – استنتاج معادلات عن مواقف حياتية.	– تمييز المتغيرات. – تمييز التراكيب الجبرية. – تمييز المعادلات. – حل معادلات تتضمن كسوراً بواسطة ضرب وقسمة الكسور، جمع وطرح الكسور. – حل معادلات ذات كسور عشرية (جمع وطرح). – حل معادلات ذات كسور عشرية (ضرب وقسمة). – تمييز تراتبية العمليات وأفضليتها.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس			
المحور والموضوع	**الصف الاول**	**الصف الثاني**	**الصف الثالث**
القيـــاس	– استخدام الوحدات غير القياسية في قياس الطول. – القيام بالتخمين ومن ثم القياس ومقارنة الأطوال. – القياس بالتخمين والقياس بالسنتيمتر. – استكشاف الكتلة والوزن. – المقارنة مع الكيلوجرام. – المقارنة مع اللتر. – التعامل مع الكمبيوتر وطاقاته. **الوقت** – تسمية الوقت بالساعات وأنصاف الساعة. – قراءة الوقت بالساعات وأنصاف الساعة. – كتابة الوقت بالساعات وأنصاف الساعة. – تمييز المسائل ذات المعلومات الزائدة.	– تمييز الوحدات غير القياسية. – تمييز السنتيمتر والمتر. – تمييز المحيط. – استكشاف المساحة. – تمييز الكيلوجرام. – تمييز اللتر. – استكشاف الحرارة. **الوقت** – تمييز الدقيقة. – تخمين الوقت. – تسمية الوقت إلى نصف ساعة. – تسمية الوقت إلى ربع ساعة. – استكشاف التقويم.	– استكشاف السنتيمتر والديسيمتر والمتر والكيلومتر. – تحديد السعة والوزن والحرارة. – استكشاف وحدات السعة والوزن والحرارة المترية. **الوقت** – تمييز الوقت إلى أقرب خمس دقائق، دقيقة، بحدود نصف الساعة، ربع ساعة. – تمييز التقويم.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
– استخدام السنتيمتر والديسيمتر والمتر والكيلومتر. – تمييز وحدات السعة والوزن والحرارة المترية. **الوقـت** – تسمية الوقت. – استخدام التقويم.	– تمييز واستخدام وحدات القياس المترية. – تمييز وحدات الطول المليمتر، السنتيمتر، المتر وعلاقتها بالكسور العشرية. – تحويل وحدات الطول وحساب المحيط. – حساب مساحة المثلث والمستطيل والمربع. – استكشاف مساحات وجوه المجسمات، استكشاف حجم شبه المكعب. – استخدام وحدات الوزن والكتلة والحرارة والسعة. – ربط الحجم بالكتلة والسعة.	– تمييز النسبة الثابتة. – حساب محيط ومساحة الدائرة. – تقدير المساحة. – حساب مساحات الوجوه باستخدام القوانين. – تمييز الحجم.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس

المحور والموضوع	الصف الاول	الصف الثاني	الصف الثالث
الهندسة	– استكشاف المجسمات. – تسمية وجوه المجسمات. – استكشاف الأشكال. – تمييز أشكال لها المقاس والشكل نفسه. – تمييز التناظر والتماثل. – رسم الأشكال ثنائية الأبعاد بواسطة توصيل نقاط.	– استكشاف المجسمات. – استكشاف الأشكال المستوية. – تمييز الأشكال المتطابقة والمستوية. – تمييز التحويلات على الأشكال. – التحويلات. – تمييز التناظر (التماثل). – تمييز الأجزاء المتطابقة. – رسم الأشكال ثنائية الأبعاد.	– تمييز المجسمات والأشكال. – استكشاف الخطوط والمستقيمات والقطع المستقيمة. – تمييز الزوايا والتحويلات الهندسية. – التناظر (التماثل). – استكشاف التطابق والتشابه. – استكشاف الحجم. – استكشاف شبكة الإحداثيات.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
– تمييز المجسمات والمثلثات والمضلعات الأخرى. – تمييز المثلثات والزوايا. – تمييز الأشكال المتطابقة. – تمييز الأشكال المتشابهة. – تمييز الخطوط والمستقيمات والقطع المستقيمة. – استكشاف الأشكال الرباعية والتناظر. – تمييز المحيط والمساحة والحجم. – تمييز شبكة الإحداثيات.	– تمييز الزوايا والمضلعات. – تمييز الخطوط والزوايا.؛ – رسم وقياس الزوايا. – رسم المثلثات. – رسم الأشكال الرباعية. – تمييز المضلعات المتشابهة والمتطابقة. – استخدام الشبكات.	– تحديد الخطوط والزوايا. – تمييز النقاط، المستقيمات والمستويات. – استكشاف الزوايا. – القيام بالإنشاءات الهندسية. – تصنيف الزوايا. – قياس الزوايا. – تمييز المضلعات. – تمييز الأشكال الرباعية. – تمييز مستوى الإحداثيات. – تمييز التحويلات والانعكاس والانسحاب. – تمييز المجسمات.

مصفوفة المدى والتتابع للمرحلة الابتدائية من الصف الأول إلى الصف السادس			
المحور والموضوع	**الصف الاول**	**الصف الثاني**	**الصف الثالث**
تحليل البيانات والاحتمال	– جمع بيانات. – تصنيف الأشياء. – تمثيل الأشياء بالصور والرسومات.	– تنظيم المعلومات. – تنظيم جدول. – إنشاء بيانات بالصور والأعمدة. – جمع بيانات واستخدامها وتمثيلها. – استكشاف الاحتمال.	– جمع بيانات. – تنظيم بيانات في جداول. – تمثيل بيانات بالصور أو الأعمدة. – التنبؤ والاحتمال.

الصف الرابع	الصف الخامس	الصف السادس
– قراءة بيانات. – تمثيل بيانات بالنقاط. – مقارنة تمثيل البيانات. – استكشاف المتوسط الحسابي. – وصف الحدث.	– وصف المعطيات. – قراءة البيانات. – قراءة ورسم الخطوط البيانية. – إيجاد الوسط الحسابي. – استخراج احتمال الحدث.	– قراءة التمثيل البياني. – حساب المتوسط الحسابي بطرق متعددة. – تمييز الاحتمال. – التنبؤ بالظواهر. – التمثيل الشجري.

نشــاط (١)

قم بزيارة لاحد فصول رياضيات المرحلة الابتدائية واكتب تقريرا حول واحد من الموضوعات التالية:

(١) مدى الالتزام بمبادئ الرياضيات المدرسية.

(٢) مدى الالتزام بمعايير العمليات الرياضية.

(٣) مدى الالتزام بمعايير محتوى الرياضيات.

نشــاط (٢)

قم بزيارة لاحدى المدارس الابتدائية واحصل على مصفوفة المدى والتتابع لمنهج الرياضيات بالمرحلة الابتدائية، ثم قارنها بالمصفوفة التي تعلمتها في هذه الوحدة من حيث:

(١) التشابه أو التقارب بينهما.

(٢) الاختلاف فيما بينهما.

(٣) مقترحاتك لتطوير منهج الرياضيات بالمرحلة الابتدائية.

الخاتمة

قدمنا في هذه الوحدة مبادئ ومعايير ومحتوى الرياضيات المدرسية بالمرحلة الابتدائية.

وقد عرضنا لموجز لأهم الإنجازات التي قدمها المجلس الوطني لمعلمي الرياضيات بالولايات المتحدة الأمريكية في مبادئ ومعايير ومحتوى رياضيات المدرسة الابتدائية بشكل مبسط وبشكل يضمن الرغبة في التعامل مع هذه المبادئ والمعايير ومحاولة السير عليها أو الاقتراب منها بدرجة كبيرة.

ثم قدمنا لمفردات المنهج المقترح لرياضيات المدرسة الابتدائية من الصف الأول حتى الصف السادس في نهاية الوحدة على شكل مصفوفة للمدى والتتابع.

إن الإلمام بمكونات هذه الوحدة يؤدي إلى تنمية الكفاية الأكاديمية والمهنية لدى معلم رياضيات المرحلة الابتدائية ومن هنا جاءت أهمية وضعها في وحدة خاصة بها في هذا الكتاب.

أسئلة التقويم الذاتي

١ – تعتبر المساواة أحد المبادئ الستة الصادرة عن NCTM للرياضيات المدرسية. وضِّح مظاهر هذه المساواة ودور المعلم في تحقيق هذا المبدأ.

٢ – كيف يحقق المعلم مبدأ التقنية الحديثة في مجال الرياضيات.

٣ – قدم رأياً تحليلياً حول مبدأي التعلم والتعليم على ضوء فهمك للمنحى البنائي.

٤ – كيف يمكن أن توظف معايير المحتوى الرياضي الصادرة عن NCTM في بناء منهاج رياضيات الصف الرابع الابتدائي.

٥ – وضِّح بدقة متطلبات تحقيق كل من المعايير التالية:

- حل المشكلات.
- التواصل.
- الترابط.
- التمثيل.
- البرهان والتبرير المنطقي.

لدى تلميذ الصف الأول الابتدائي عند تدريسه مادة الرياضيات.

٦ – قارن بين محتوى مناهج رياضيات المدرسة الابتدائية الموجودة في بلدكم وبين المحتوى المقترح في هذا الفصل. وأعرض ما توصلت إليه على زملائك في الصف.

المصادر والمراجع

- National Council of Teacher of Mathematics (1989), Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1991), Professional Standards for Teaching Mathematics, Reston, VA: Author.
- National Council of Teachers of Mathematics (1995), Assessment Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.
- National Council of Teacher of Mathematics (2000), Professional and Standards for School Mathematics, Reston, VA: Author.

وحدات مقــرر ED 360

الوحدة الأولى : الاحصاء والاحتمال

الوحدة الثانية : الهندسة

الوحدة الثالثة : القياس

الوحدة الرابعة : حل المسألة الرياضية

الوحدة الخامسة : مبادئ ومعايير ومحتوى رياضيات المرحلة الابتدائية